# EXPERIMENTO: CONFECCIONANDO E VERIFICANDO QUE A CURVA CICLÓIDE APRESENTA O MENOR TEMPO ENTRE DOIS PONTOS DESNIVELADOS

*Experiment: making and verifying that the cycloid curve has the shortest time between two uneven points*

**Vanessa Torres** [rodriguesdeoliveiravanessa@gmail.com]
**M. Gomes da Silva** [marcio.gomes@ifam.edu.br]
*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Amazonas - IFAM*
*Av. Sete de setembro, 1975 – Manaus centro – CEP: 69.020-120*

*Recebido em: 27/01/2020*
*Aceito em: 06/08/2020*

## Resumo

Qual é o caminho mais rápido entre dois pontos desnivelados? Possivelmente, muitos responderão que é a reta, ao imaginar que o caminho mais curto é sempre, também, o mais rápido. A constatação experimental ainda surpreende pessoas que a vêem pela primeira vez. O problema da braquistócrona é uma questão mecânica-geométrica sobre a curva de descida mais rápida. A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas Brachistos, que significa menor, e Chronos, que significa tempo. Este experimento tem como finalidade mostrar que o caminho mais rápido entre dois pontos com uma aceleração constante no problema da braquistócrona é a ciclóide. A experimentação constitui-se como um importante recurso metodológico e que facilita o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o, também significativo. Se tirarmos o foco da demonstração matemática que prova que a ciclóide é mesmo braquistócona, podemos trabalhar com alunos de ensino médio, de uma forma especial com alunos do 3° ano. Neste sentido, o desenvolvimento desse trabalho busca unir conceitos de física e matemática, objetivando aguçar a curiosidade, dos alunos, no que tange a descoberta das fantásticas propriedades desta curva e expandindo para outras curvas interessantes construídas de forma similar a da curva ciclóide, a saber: a epiciclóide e a hipociclóide.

**Palavras-chave:** Menor tempo, Ciclóide, Experimento.

## Abstract

What is the fastest path between two uneven points? Possibly, many will answer that it is the straight line, when they imagine that the shortest path is always, also, the fastest. The experimental finding still surprises people who see it for the first time. The brachistochrone problem is a mechanical-geometric question about the fastest descent curve. The word brachistochrone is derived from the Greek words Brachistos, which means minor, and Chronos, which means time. This experiment aims to show that the fastest path between two points with a constant acceleration in the brachistochrone problem is the Cycloid. Experimentation is an important methodological resource that facilitates the teaching-learning process, making it also significant. In this sense, the development of this work seeks to unite concepts of physics and mathematics, aiming to sharpen the curiosity, of the students, regarding the discovery of the fantastic properties of this curve and expanding to other interesting curves constructed in a similar way to the cycloid curve, namely: the epicycloid and the hypocycloid.

**Keywords:** Shortest time, Cycloid, Experiment.

## 1. INTRODUÇÃO

Se perguntarmos a alguém qual é o caminho mais rápido entre dois pontos desnivelados, possivelmente responderá que é a reta ao imaginar que o caminho mais curto é sempre, também, o mais rápido.

Observar que existe um caminho maior que, porém, torna o tempo de percurso menor pode causar estranheza. Apesar de se tratar de um problema antigo, do final do século XVII, e bem conhecido no meio acadêmico, a constatação experimental ainda surpreende pessoas que a veem pela primeira vez. O problema da braquistócrona é uma questão mecânica-geométrica sobre a curva de descida mais rápida. A palavra braquistócrona deriva das palavras gregas Brachistos, que significa menor, e Chronos, que significa tempo. Consiste em obter a curva que minimiza o tempo que uma partícula, sob a ação da gravidade, leva para ir de A até B. A solução é a curva chamada ciclóide, que é gerada por uma circunferência rolando sem deslizar.

Este experimento tem como finalidade mostrar que o caminho mais rápido entre dois pontos com uma aceleração constante no problema da braquistócrona é a ciclóide. Na literatura educacional, pode-se observar que muitos autores destacam que a experimentação constitui um importante recurso metodológico e que facilita o processo de ensino-aprendizagem, tornando-o, também significativo. Segundo Demo (2011, p.41),

> Cabe o professor competente conduzir essa aprendizagem significativa, orientando o aluno permanentemente para expressar-se de maneira fundamentada, exercitar o questionamento e formulação própria, reconstruir autores e teorias e cotidianizar a pesquisa.

Destaca-se que a experimentação proporciona uma situação de investigação e permite a discussão e interpretação dos resultados encontrados. As atividades práticas são indispensáveis para a construção do pensamento científico, por meio de estímulos ocasionados nas atividades experimentais.

Na aula teórica, o aluno recebe as informações do conteúdo por meio das explicações do professor, diferentemente de uma aula prática, pois ao ter o contato físico com o objeto de análise ele irá descobrir o sentido da atividade, o objetivo e qual o conhecimento que a aula lhe proporcionará.

Neste sentido, o desenvolvimento desse artigo busca aguçar e estimular a curiosidade pelo estudo da matemática relacionada com a física, especialmente pelo estudo das curvas cicloidais, aliando teoria e prática.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O desafio de encontrar a braquistócrona foi proposto em junho de 1696 por Johann Bernoulli (1667-1748) na revista Acta Eruditorum de Leipzig e apresenta-se traduzido do latim em:

> Dados dois pontos A e B em um plano vertical, fazer corresponder a uma partícula móvel M a trajetória AMB pela qual a partícula, descendo sobre o seu próprio peso, passa do ponto A para o ponto B no espaço de tempo mais curto.

Convidou os matemáticos da época a resolverem e ainda afirmou que embora o segmento AB fosse, de fato, o caminho mais curto entre os pontos A e B, no entanto, não seria esse o caminho percorrido no menor tempo. Afirma ainda que tal curva é bem conhecida dos geômetras e desta forma expõe que já tinha encontrado a solução.

Posteriormente, em janeiro de 1697, Johann faz uma nova publicação (Groeningen) reescrevendo o problema da seguinte maneira:

> Determinar a curva que junta dois pontos dados, a diferentes distâncias na horizontal e não na mesma linha vertical, pela qual uma partícula móvel, sob o seu próprio peso, e começando o seu movimento no ponto superior, desce mais rapidamente até ao ponto inferior.

Além disso, prolonga o prazo para que as soluções fossem apresentadas, atendendo a um pedido de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), único a escrever-lhe afirmando ter resolvido o problema. Desta forma, a questão poderia ser tornada pública na França e Itália e, ainda, para aqueles que não tiveram acesso à Acta.

O texto da segunda publicação de Bernoulli curiosamente cita Blaise Pascal (1623 -1662), que foi um grande estudioso da ciclóide, e Pierre de Fermat (1601 -1665), que dá nome ao princípio do tempo mínimo. Ainda deixa expresso que utiliza a hipótese de Galileu em sua solução e que desconsidera a fricção, logo "velocidades adquiridas por um corpo pesado em queda são proporcionais à raiz quadrada da altura percorrida em queda".

Em maio de 1697, a Acta Eruditorum publicou quatro soluções cujos autores eram Leibniz, o próprio Johann Bernoulli, seu irmão mais velho Jacob Bernoulli (1654-1705) e uma resolução anônima cuja autoria foi reconhecida como sendo de Isaac Newton (1643 -1727). "O Leão se reconhece pelas marcas de suas garras!" é um comentário atribuído a Johann Bernoulli referindo-se a Newton, a propósito da solução anônima apresentada. Johann Bernoulli é considerado o primeiro a resolver a questão: mostrou que a solução é uma ciclóide.

A ciclóide é o locus (lugar geométrico) descrito por um ponto na borda de um disco rolando ao longo de uma linha reta. A ciclóide havia sido, anteriormente, amplamente estudada e chamada como tal por Galileu em 1599, que tentou encontrar a área usando pedaços de metal cortados na forma da ciclóide. Torricelli, Fermat e Descartes encontraram formalmente a área. A ciclóide também foi estudada por Roberval em 1634, Wren em 1658, Huygens em 1673 e Johann Bernoulli em 1696. Roberval e Wren encontraram o comprimento do arco.

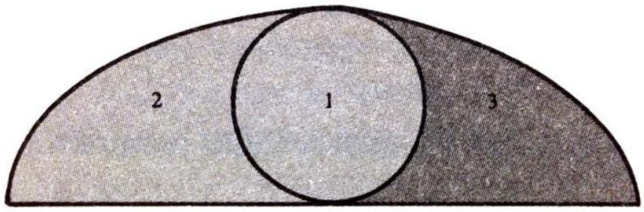
A família Bernoulli teve grandes problemas em relação a essa curva. Os irmãos Johan e Jackob levaram a disputa pelo encontro da solução da Braquistócrona tão a sério que a comunicação entre ambos foi interrompida. A resolução de Johan é muito interessante e diz-se que foi feita “utilizando o princípio da difusão de um raio luminoso através da densidade variada, isto é, calculando a curvatura de um raio em meio não uniforme” (BUSTILLOS E SASSINE 2011). Em contrapartida, Jakob Bernoulli resolveu de forma mais genérica, utilizando como ferramenta os Máximos e Mínimos[1].

A curva que responde o problema colocado é rica em propriedades curiosas e por gerar tantas controvérsias foi chamada "a Helena da geometria" ou "o pomo da discórdia". Graças à resolução do problema da Braquistócrona, surge o cálculo variacional, o qual revolucionou a matemática e depois a óptica, devido aos trabalhos de Euler e Lagrange. (BUSTILLOS e SASSINE, 2011). Vejamos algumas propriedades desta curva:

- a área delimitada por um arco de ciclóide e o eixo das abscissas é igual a três vezes a área do círculo que lhe dá origem (Figura 1);
- 

[1] São ferramentas do Cálculo Diferencial Integral para resolver problemas de otimização, em que devemos encontrar a maneira ótima (melhor maneira) de fazer alguma coisa (STEWART, 2010).

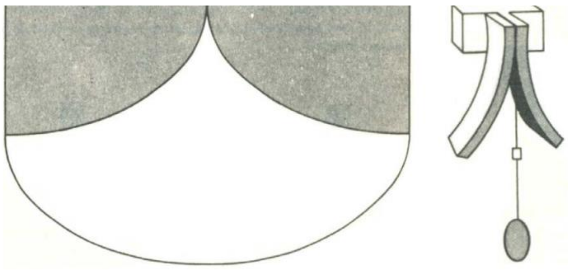
***Figura 1:*** *Área delimitada por um arco de ciclóide.*




Fonte: repositorio.unesp.br

- o comprimento de um arco de ciclóide é quatro vezes o diâmetro do círculo rolante que a gerou;
- se pendurar um pêndulo e colocar dois arcos de uma ciclóide como batentes, este descreverá uma ciclóide igual à que gerou os arcos (Figura 2);

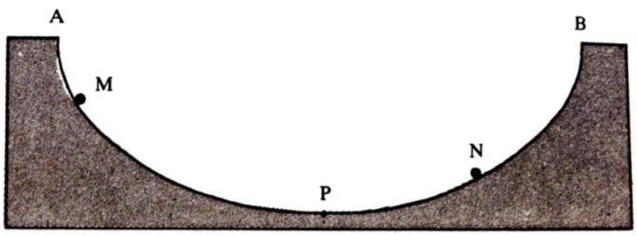
***Figura 2****: Curva gerada por pêndulo com arcos de ciclóide como batentes.*



Fonte: repositorio.unesp.br

- quando o peso de um pêndulo move-se ao longo de uma ciclóide, ainda que a amplitude de oscilação aumente ou diminua, o período do pêndulo continua sendo o mesmo, pois é uma curva isocrônica (ou tautocrônica), ou seja, o tempo gasto por um objeto para deslizar sem fricção, em gravidade uniforme, até seu ponto de mínimo é independente de seu ponto de partida (Figura 3).

***Figura 3:*** *Curva isocrônica.*




Fonte: repositorio.unesp.br

A Braquistócrona é um problema que faz parte de todo o desenvolvimento do cálculo de variações e o isocronismo contribuiu para a construção de relógios de pêndulo mais precisos e dos marítimos.

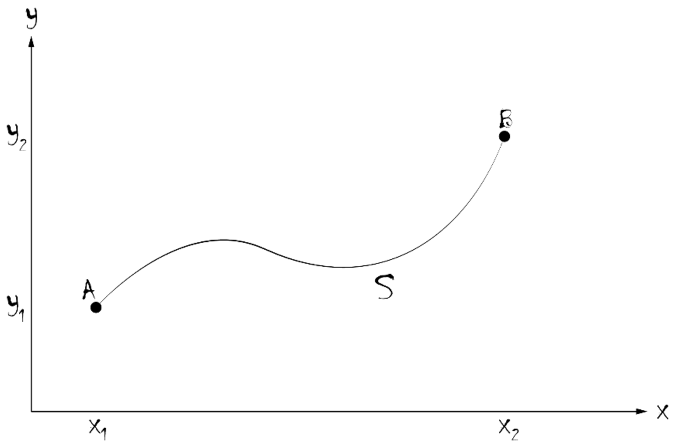
## 2.1. O CÁLCULO VARIACIONAL E A EQUAÇÃO DE EULER-LAGRANGE

Muitos problemas da física e matemática podem ser solucionados obtendo-se pontos mínimos e/ou máximos de uma função. O problema central do cálculo das variações é, justamente, determinar uma função *y(x),* com valores fixos em $x = x_1$ e $x = x_2$, que faça o funcional J*[y]* atingir um valor máximo ou mínimo, dentro desse intervalo. O funcional é definido pela seguinte integral:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x)dx \qquad (1)$$

O problema da braquistócrona é o de encontrar a curva que faça o funcional tempo T[*y*] ser o menor possível. Analogamente, existe o problema da menor distância entre dois pontos que é, justamente, o de definir, dado um plano, a curva de menor comprimento entre dois pontos A ($x_1$, $y_1$) e B ($x_2$, $y_2$) em uma trajetória *S*, como é mostrado na Figura 4. Esse último exemplo pode ser usado para entender melhor qual a ideia por trás do cálculo das variações e o conceito de funcional.

***Figura 4:*** *A menor distância entre dois pontos*




Fonte: Vanessa Torres, 2019

A partir da curva *S*, pode-se escrever o comprimento infinitesimal d*S* como:

$$dS = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \qquad (2)$$

O funcional S[y] é obtido ao integrar a função d*S* (x, y'), evidenciando $(dx)^2$, no intervalo desejado. O S[y] é um tipo de J[y], isto é, representa a integral de um comprimento infinitesimal.

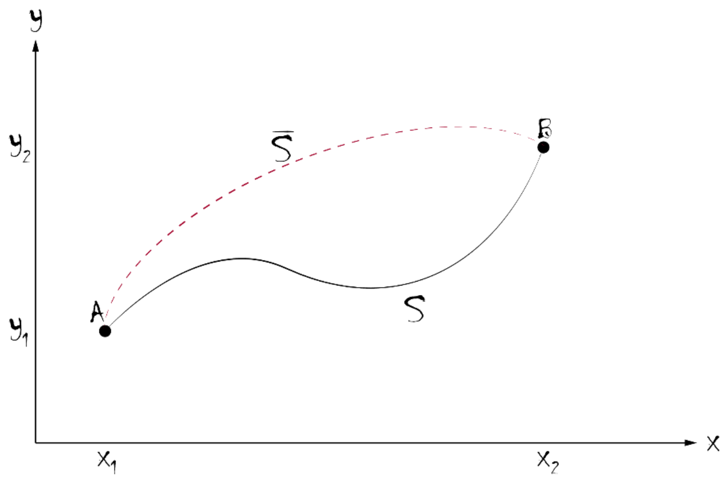
$$S[y] = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (3)$$

onde $y'$ é a derivada em relação à x. A partir desse funcional, deseja-se encontrar uma função dentro do intervalo [$x_1$, $x_2$] que garantirá, dimensionalmente, o menor comprimento possível para *S* e será obtida resolvendo a equação de Euler-Lagrange.

2.1.1. Resolução para o problema da menor distância entre dois pontos

O que caracteriza os máximos e mínimos de qualquer função é que, para um deslocamento mínimo em relação aos extremos, a derivada de primeira ordem não muda. A ideia adotada no cálculo variacional é análoga, para uma variação infinitesimal de trajetória, o funcional S[y] deve ser constante. O problema da menor distância entre dois pontos, mencionado anteriormente, pode ser resolvido utilizando o cálculo das variações. Para determinar a curva *S* de comprimento mínimo será de grande ajuda construir, entre os pontos A e B, uma curva $\bar{S}$ como é mostrado na Figura 5, que tornará mínimo o valor do funcional J[α] que será usado para determinar a Equação de Euler-Lagrange e, depois, substituído pelo funcional S[y] que derivará a solução para o problema.

***Figura 5:*** *Funções com extremos coincidentes*




Fonte: Vanessa Torres, 2019

Como é de interesse somente o intervalo analisado, uma expressão possível para a nova curva é:

$$\bar{y}(x,\alpha) = y(x) + \alpha\eta(x) \tag{4}$$

Onde $\bar{y}$ é o valor da curva $\bar{S}, \forall\, x \in [x_1, x_2], \alpha \in \mathbb{R}$ e η(x) é uma função que se anula nos pontos de intersecção das duas curvas.

Como mencionado anteriormente, o problema pode ser solucionado resolvendo-se a Equação de Euler-Lagrange, que será formalizada nessa subseção. Para isso, considere o funcional:

$$J[\alpha] = \int_{x_1}^{x_2} f(\bar{y}, \bar{y}', x)dx \tag{5}$$

Como no limite do intervalo existe a condição em que a derivada de J [α] é nula $\frac{dJ}{d\alpha} = 0$ (quando α = 0). Como o termo α está embutido somente em $\bar{y}$ e $\bar{y}'$, pode-se, utilizando a regra da cadeia, derivar a função dentro da integral:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{d\bar{y}}\frac{d\bar{y}}{d\alpha} + \frac{df}{d\bar{y}'}\frac{d\bar{y}'}{d\alpha}dx \tag{6}$$

Nos limites do intervalo, α = 0 e o termo $\frac{d\bar{y}}{d\alpha} = \eta(x)$. A integral pode ser reescrita como:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy}\eta(x) + \frac{df}{dy'}\eta(x)'dx = 0 \qquad (7)$$

Integrando por partes o segundo termo, e tomando os limites de integração teremos:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy'}\eta(x)'dx = \frac{df}{dy'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}dx \qquad (8)$$

Nos extremos de $\frac{df}{dy'}\eta\,(x), \eta\,(x_1) = \eta\,(x_2) = 0$ e a integral se reduz a simplesmente:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy'}dx \qquad (9)$$

Como essa relação é válida para qualquer η (x) ∈ ℝ, obtém-se a equação de Euler-Lagrange que, basicamente verifica, entre uma classe de funções estacionárias, aquela que possui os mesmos limites do funcional J[y].

$$\frac{df}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{df}{dy'} = 0 \qquad (10)$$

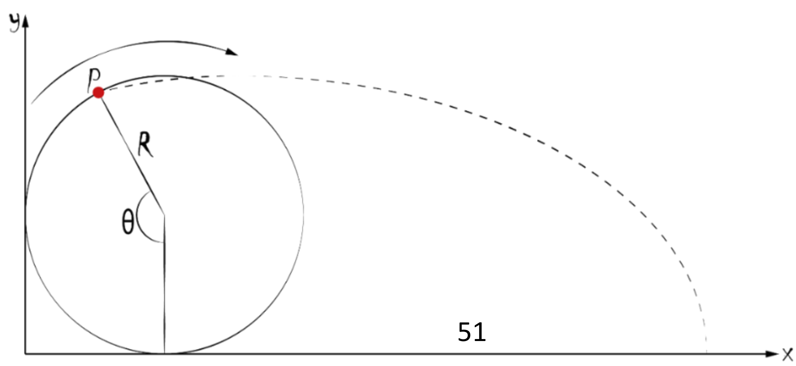
Pode-se resolver o problema da menor distância entre dois pontos em um plano substituindo o funcional S[y] (desenvolvido na seção anterior) na equação diferencial acima. $\frac{ds}{dy}$ é nulo, pois o funcional não depende de y, mas sim de sua derivada e $\frac{d}{dx}\frac{ds}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$ = cte

A solução para essa diferencial está numa família de funções que descrevem uma reta num plano. Deste modo, conclui-se que a menor distância entre dois pontos é dada por uma reta. É importante destacar que foi usado como referência para a dedução da equação de Euler-Lagrange o vídeo do professor Jorge Sá Martins do IF-UFF, o link do vídeo se encontra nas referências bibliográficas.

## 2.2. A CURVA CICLÓIDE

A curva ciclóide é a trajetória definida por um ponto P em uma circunferência que, inscrita sobre um plano, é transladada paralelamente a um eixo referencial fixo, como observado na Figura 6.

***Figura 6:*** *A curva ciclóide*



Fonte: Vanessa Torres, 2019

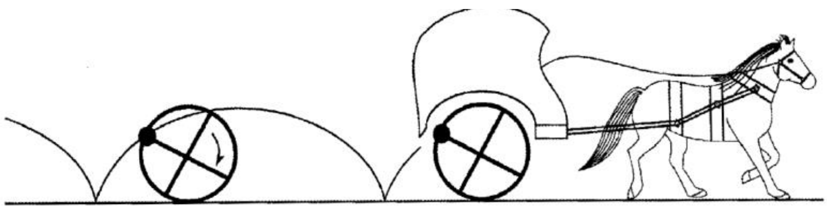
É possível demostrar que as equações paramétricas para as coordenadas $x = f(\theta)$ e $y = g(\theta)$ que definem uma curva ciclóide são:

$$\begin{cases} x = R(\theta - \sin\theta) \\ y = R(1 - \cos\theta) \end{cases}$$

Essa Curva foi observada por Galileu enquanto olhava pela janela uma charrete passando na rua. Intrigado com a curva que enxergou quando a roda da charrete fazia um movimento completo, resolveu estudá-la, utilizando conceitos da Física, e a nomeou de "Ciclóide" (BUSTILLOS E SASSINE, 2011).

Uma formalização da definição de ciclóide foi feita por Coelho (2008, p. 12), que diz "é a curva descrita por um ponto da circunferência de um círculo que rola sobre uma reta sem deslizar".

***Figura** 7- A Curva Ciclóide criada pela roda de uma charrete que gira ao longo de uma reta.*

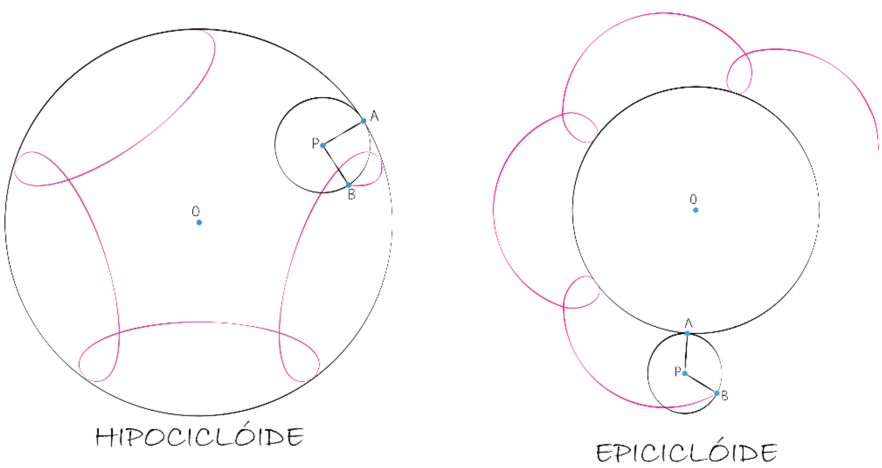


Fonte: Retirado de Bustillos e Sassine (2011, p. 22).

### 2.2.1. Curvas Epiciclóide e Hipociclóide

A Curva Ciclóide aqui exposta foi descrita girando sobre uma reta, sem deslizar. Se pensarmos em uma circunferência girando ao redor de outra, obtemos a *Epiciclóide*; e se pensarmos em uma circunferência girando dentro de outra, obtemos a *Hipociclóide* (Figura 8).

***Figura 8** – Hipociclóide e Epiciclóide*




Fonte: Vanessa Torres, 2019

## 3. MATERIAIS UTILIZADOS

Muitas escolas públicas não tem laboratório para a realização das atividades experimentais, por isso que a utilização de experimentos de baixo custo é bastante viável, pois os mesmos podem ser realizados em sala de aula sem a necessidade de aparelhos sofisticados, além disso, os experimentos de baixo custo podem ser confeccionados com facilidades pelos alunos, podendo ser refeito em casa quando necessário facilitando dessa forma a apropriação dos conteúdos da Física.

Neste sentido utilizou-se materiais de baixo custo para a construção do modelo matemático do experimento aqui apresentado. Segue abaixo a lista de materiais utilizados.

**Tabela 1** - Materiais para a confecção da braquistócrona

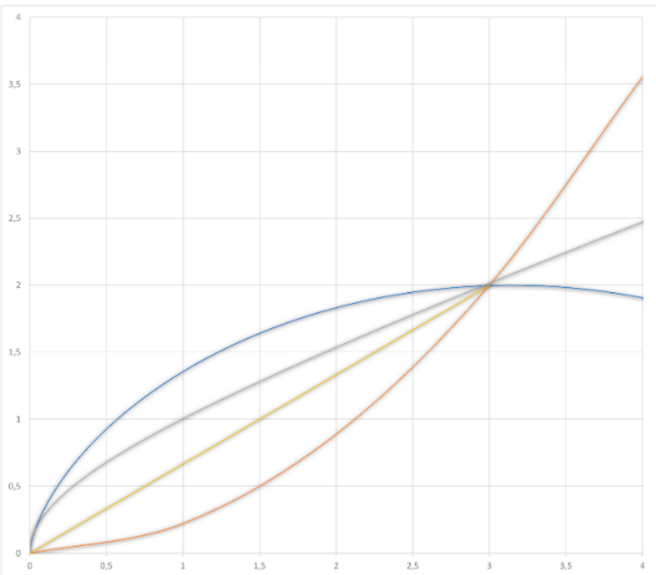
| **Materiais de Baixo Custo** | |
|---|---|
| Papelão | Elásticos |
| Tesoura | Cola |
| Régua | Esquadros |
| Pincel | Algodão |
| Papel A3 | 4 petecas (esféricas) |

## 4. PROCEDIMENTO

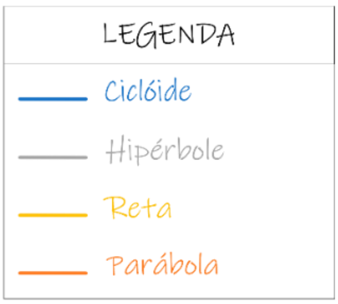
Esse é um aspecto de grande importância, uma vez que na escola de educação básica os professores dificilmente irão dispor de técnicos para preparação das aulas práticas. Dessa forma como proposta para que os próprios professores confeccionem as curvas que constituem a braquistócrona, além da testagem do procedimento experimental, com materiais de baixo custo, foram adotados os seguintes procedimentos:

a) Usando o software Excel foram feitas as equações das curvas: uma hipérbole, uma parábola, uma reta e uma cicloide;
b) Em seguida foi gerado o gráfico correspondente às curvas, no limite de x=0 até 3 em que as curvas se interceptavam no ponto (3, 2) conforme mostra a Figura 9;

***Figura 9** - Construção do gráfico no Excel*

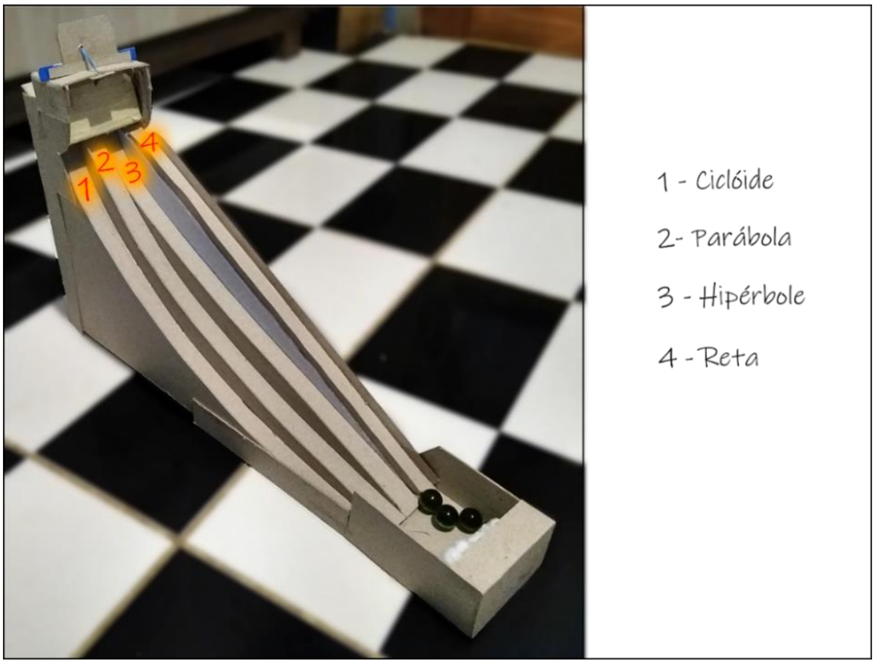


Fonte: Vanessa Torres, 2019



c) Depois de plotado, o gráfico foi convertido em PDF, e aberto em um software de desenho chamado Illustrator, e então foram redesenhadas cada curva no programa para depois serem impressas separadamente;
d) O próximo passo foi imprimir em papel A3 os respectivos gráficos, que serviram como molde para a construção do experimento;
e) Em seguida foi recortado o papelão de acordo com cada molde e montado o experimento;
f) Posteriormente quatro petecas (esféricas) foram abandonadas a uma mesma altura e ao mesmo tempo. Cada esfera percorre uma curva diferente. Foi feito um vídeo em slow motion para analisar aquela que chegou primeiro;
g) O modelo matemático do experimento foi feito levando em consideração esses quatro tipos de curvas em um plano euclidiano xy como mostra a imagem abaixo:

***Figura 10*** *- Experimento em construção*



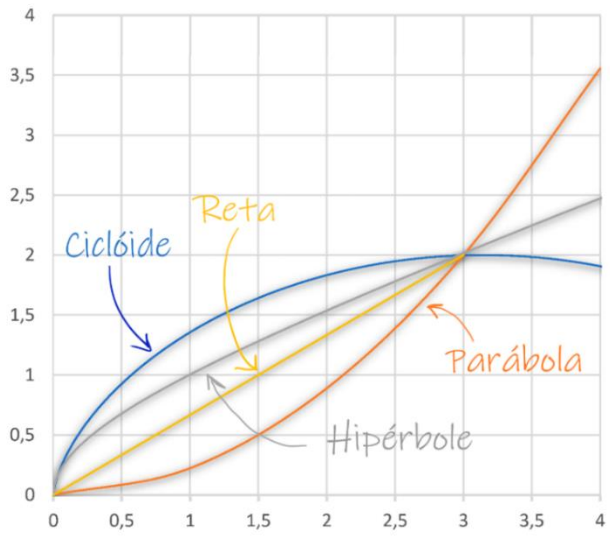

Fonte: Vanessa Torres, 2019

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O problema da braquistócrona gira em torno de se encontrar uma curva que faça com que um objeto de massa **m** sujeito apenas à aceleração gravitacional percorra a distância entre dois pontos distintos no menor tempo possível partindo do repouso. Essa partícula está sob a singular ação da força da gravidade e é abandonada a partir do repouso e de sua origem, em $x = 0$. O deslocamento em $x$ é $x_0$, do ponto inicial ao final.

No experimento que estamos apresentando as curvas se encontram no intervalo (0, 0) a (3, 2), cuja a construção foi feita no Excel e explicado na seção 4, como mostra o gráfico a seguir:

***Figura 11*** *- Representação das curvas parametrizadas*




Fonte: Vanessa Torres, 2019

Para esses intervalos as equações parametrizadas são:

Para a hipérbole, $\begin{cases} x = 2{,}4\sec(t) - 2{,}4 \\ y = tg\ (t) \end{cases}$

Para a cicloide, $\begin{cases} x = r\ (t - sen(t)) \\ y = r\ (1 - cos\ (t)) \end{cases}$

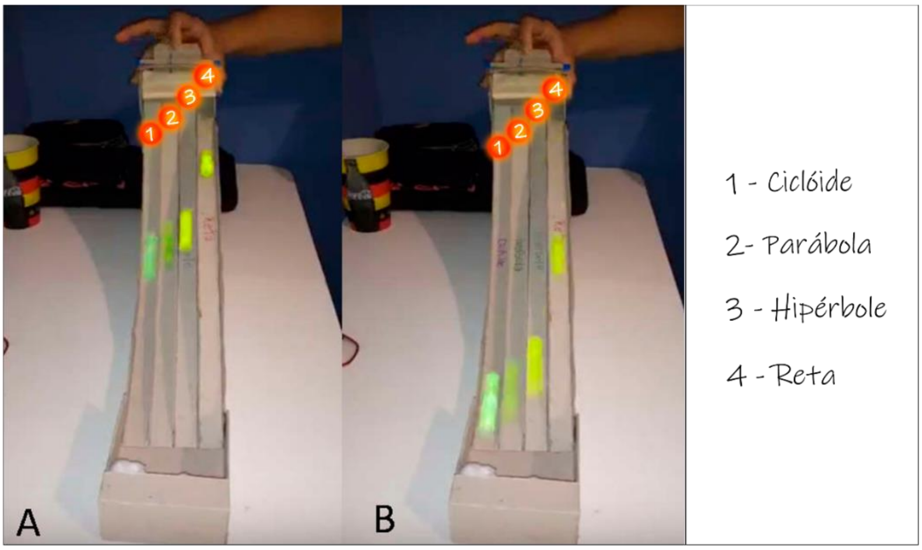
Para a parábola, $x = \frac{2}{9}t^2$

Para a reta, $x = \frac{2}{3}t$

As curvas da parábola, hipérbole e reta foram baseadas na curva da ciclóide para r = 1 e em seu ponto máximo (3, 2) onde elas se interceptam para esse caso, como foi demostrado no gráfico construído para o modelo matemático aqui exposto.

Neste experimento quatro petecas (esféricas) foram abandonadas a uma mesma altura e ao mesmo tempo. Cada esfera percorre uma curva diferente (Figura 10). Foi feito um vídeo em slow motion para analisar visualmente aquela que chegou primeiro. Também foi usado um cronômetro para verificar o tempo de queda das esferas referentes as suas respectivas curvas. Segundo a observação feita da gravação em vídeo a primeira esfera que chegou ao solo foi a esfera da curva ciclóide, seguida pela esfera da curva parábola, hipérbole e reta, nesta ordem. Quanto a análise feita pelo cronômetro os dados se encontram na tabela 2 (tempo de queda). De forma surpreendente, a reta que possui a trajetória mais curta, é também a que apresenta maior tempo gasto para completar o trajeto. Abaixo seguem imagens da gravação feita em slow motion:

***Figura 12****- Curvas da braquistócrona*




Fonte: Vanessa Torres, 2019

Utilizando como recurso um crônometro, foi repetido o experimento cinco vezes e coletado o intervalo de tempo, desta forma calculou-se o tempo médio de descida e o desvio padrão das esferas (petecas) referente a cada curva.

Para calcular o desvio padrão foi utilizado a seguinte fórmula:

$$Dp = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2}{n}}$$

Onde:

Dp = Desvio padrão;

$t_i$ = O valor individual do tempo;

$\bar{t}$ = Média do intervalo dos tempos e

$n$ = Número de vezes que o tempo foi coletado.

Em que $\bar{t}$ é calculado através da seguinte fórmula:

$$\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i$$

Os dados coletados se encontram na tabela abaixo:

***Tabela 2*** *- Tempo de Queda (descida)*

| | Tempo Médio | Desvio Padrão |
|---|---|---|
| Reta | 0,52 s | 0,008 |
| Hipérbole | 0,50 s | 0,019 |
| Parábola | 0,48 s | 0,022 |
| Ciclóide | 0,44 s | 0,014 |

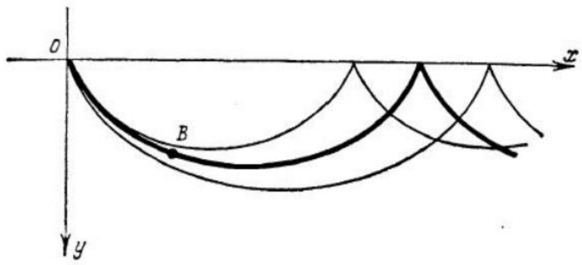
Agora vamos aplicar uma condição que irá mostrar na teoria que a ciclóide é realmente a curva que minimiza o tempo de descida da partícula entre os dois pontos.

O feixe de ciclóides $x = C_1\,(t - sen(t))$ e $y = C_1$ (1 – cos (t)) com centro em (0, 0) forma um campo central que inclui o extremal:

$x = \alpha\,(t - sen(t))$ e $y = \alpha\,(1 - \cos(t))$

onde $\alpha$ é determinado pela condição de que a ciclóide passa pelo segundo ponto de fronteira B $(x_1, y_1)$, então $x_1 < 2\pi\alpha$ (Figura 13).

***Figura 13** - Feixe de Ciclóides*




Fonte: (ELSGOLTZ,1696)

Temos também

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}} \quad e$$

$$F_{y'y'} = \frac{1}{\sqrt{y}(1+y'^2)^{3/2}} > 0$$

para qualquer $y'$ . Assim, pelas condições suficientes, para $x_1 < 2\pi\alpha$, o funcional assume o mínimo na ciclóide.

$x = \alpha\,(t - sen(t))$ e $y = \alpha\,(1 - \cos(t))$

Desta forma temos a comprovação teorica de que a solução do problema da Braquistócrona é realmente a ciclóide, como foi mostrado nesse experimento.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com este trabalho vimos que a partir de um problema proposto como desafio aos matemáticos da época, iniciou-se uma busca por métodos de solução o que culminou no que hoje conhecemos como cálculo variacional.

Desenvolvemos a solução do problema da Braquistócrona atráves da teoria do cálculo variacional em que obtivemos como resposta a ciclóide. Em seguida, o experimento foi realizado várias vezes e gravado, foi usado como recurso um aplicativo de slow motion e um cronômetro, para ser posteriormente analisado e determinar o tempo de queda de cada esfera com o objetivo de comparar a partícula que chega primeiro ao solo através de diversas curvas; a conclusão obtida já era esperada devido ao desenvolvimento teórico anterior; mais uma vez constatamos que a ciclóide é a curva de descida mais rápida.

O professor pode, com facilidade, fazer essa demonstração em sala de aula e chamar a atenção de seus estudantes para as várias e curiosas propriedades da ciclóide. Para alunos com gosto pela Matemática, o problema serve muito bem para apresentar o cálculo das variações e o método de Euler-Lagrange. Por fim, deve ser salientada a importância histórica do problema e a forma como foi solucionado pelos grandes matemáticos do século XVII.

Como resultado deste artigo espera-se obter uma maximização da aprendizagem e uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos em relação as curvas cicloidais, o problema da braquistócrona e suas propriedades abordados pelos estudantes e desfazer dificuldades de professores em utilizar pequenos experimentos demonstrativos, principalmente os de fácil produção e baixo custo.

## 7. REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATISTA, G. S.; FREIRE, C.; MOREIRA, J. E. **Experiências com a Braquistócrona.** Revista Física na Escola, v. 7, n. 2, p. 58–60, 2006.

BUSTILLOS, Oscar Vega; SASSINE, André. **A Magia da Curva Cicloide:** Braquistócrona e Tautócrona. São Paulo: Scor Tecci, 2011. 252 p.

COELHO, Rejeane Alexandre. **A História dos Problemas da Tautócrona e da Braquistócrona.** 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Educação Matemática, Departamento de Instituto de Geociências e Ciências Exatas Campus de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, 2008.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa.** 7. ed. Campinas: Autores Associados, 2011.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FERRAO, A. C. J.; KAWANO, A. **Curvas Naturais.** São Paulo: EPUSP, 2004.

KIBBLE, T. W. B. **Mecânica clássica.** Urmo: S.A. de Ediciones, 1974.

MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de las partículas y sistemas**. Barcelona: Reverté, 1991.

STEWART, James. **Cálculo**. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011. (Volumes 1 e 2).

SYMON, K. R. **Mecânica.** 2. ed. Campinas: Campus, 1982.

VIANA, R. L. **Cálculo Variacional.** Curitiba: [s.n.], 2011. 11 maio.

https://www.youtube.com/watch?v=gJ2KLWzYu8Q . Acesso em: 21 de nov. de 2019.