INCENTIVANDO O APRENDIZADO DE DISTRIBUIÇÃO BINOMIAL DE PROBABILIDADE POR MEIO DA ESTATÍSTICA MENSAL DE OCORRÊNCIA DE TROVOADAS

Encouraging The Learning of Binomial Probability Distribution through The Monthly Statistics of The Occurrence of Thunderstorms

Lúcio Ângelo Vidal (lucio.vidal@ifmt.edu.br)
José Vinícius da Costa Filho (jose.costa@ifmt.edu.br)
Rua Professora Zulmira Canavarros, nº 95 – CEP: 78005-200, Centro, Cuiabá –MT IFMT Campus Cuiabá
Andreia da Silva Tavares (andreia.physical@gmail.com**)**

Recebido em: 30/07/2023
Aceito em: 28/01/2024

Resumo

O objetivo deste artigo foi mediar uma experiência de ensino de distribuição binomial a partir de uma estatística de ocorrência de trovoadas realizada com quinze estudantes de Engenharia de uma instituição pública de nível superior na cidade de Cuiabá. Na aula seguinte de Física àquela que abordava o conceito de convecção, foram apresentadas as probabilidades empíricas de ocorrência de trovoadas em cada mês na referida cidade por meio de uma série histórica e o conceito de distribuição binomial com exemplos práticos. Como resultados do processo avaliativo da aprendizagem, verificaram-se os tipos de equívocos mais comuns cometidos no cálculo, o acerto de todas as questões do teste por dois estudantes e a maioria dos discentes não ter resolvido corretamente nenhuma das questões. Julga-se aqui importante incentivar a realização de mais experiências de ensino voltadas ao cálculo de probabilidades de acontecimento de um fenômeno meteorológico, ao cálculo de probabilidades de ocorrência de uma faixa de valores numéricos para uma variável atmosférica e até mesmo à Meteorologia de uma forma geral.

Palavras-Chave: probabilidade de trovoada, probabilidade empírica e trovoadas por mês.

Abstract

The objective of this article was to mediate a binomial distribution teaching experience based on statistics on the occurrence of thunderstorms carried out with fifteen Engineering students from a public higher education institution in the city of Cuiabá. In the Physics class following the one that addressed the concept of convection, the empirical probabilities of the occurrence of thunderstorms in each month in that city were presented through a historical series and the concept of binomial distribution with practical examples. As a result of the learning evaluation process, the most common types of mistakes made in calculation were verified, two students getting all the test questions right and the majority of students not correctly solving any of the questions. It is considered important to encourage more teaching experiences aimed at calculating the probabilities of a meteorological phenomenon occurring, calculating the probabilities of occurrence of a range of numerical values for an atmospheric variable and even meteorology in general.

Keywords: thunderstorm probability, empirical probability and thunderstorms by month.

Introdução

A Meteorologia é em essência uma ciência interdisciplinar e assim sendo, inevitavelmente envolve várias disciplinas, tais como Física e Matemática. Na medida do possível, também é interessante que professores, isoladamente ou em conjunto, pensem de forma interdisciplinar e que promovam essa realização em sala de aula para seus discentes.

Nessa perspectiva, julgou-se interessante que na aula consecutiva de Física àquela que abordou o desenvolvimento de trovoadas por meio do processo de transmissão de calor por convecção, apresentar probabilidades empíricas do fenômeno na cidade em que os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem residem e que a partir dessa informação, calcular a chance de ocorrência de um certo número de dias de trovoadas em um determinado mês utilizando a distribuição binomial de probabilidade.

Além disso, entende-se como de fundamental importância que o estudo de distribuições de probabilidade seja aplicado em situações do cotidiano meteorológico e/ou climatológico como por exemplo às ocorrências estatísticas de alguns valores numéricos de uma determinada variável meteorológica e à ocorrência de um determinado fenômeno meteorológico.

Percebe-se uma escassez enorme no que diz respeito a artigos que abordem o ensino de distribuição binomial. Talvez até pelo fato de alguns estudos sugerirem ausência de bases matemáticas de muitos alunos da área de exatas no Ensino superior, tais como Fernandes Filho (2001), Gerab e Valério (2014), Passos *et al* (2007) e Vidal e Cunha (2019). Dessa maneira, pode-se causar falta de atratividade entre docentes e discentes a abordagem do tema. Apesar de tudo, é possível mencionar as publicações de Vidal *et al* (2020) e Vidal e Tavares (2022) que abordam o tema.

O primeiro desses dois trabalhos trata do ensino da probabilidade de ocorrência também de um fenômeno meteorológico, sendo mais específico de um determinado número de dias de chuva em um determinado mês do ano. O segundo, por sua vez, trata não apenas da distribuição binomial como também da trinomial aplicadas ao ensino, porém empregados às estatísticas do campeonato brasileiro de futebol da primeira divisão para determinar a probabilidade de vitória, empate e derrota do time anfitrião.

O objetivo geral deste artigo foi mediar o ensino do cálculo de probabilidade de ocorrência de um certo número de dias de trovoadas em um determinado mês. Os objetivos específicos deste artigo foram verificar: 1) se os alunos conseguiram entender os conceitos envolvidos no cálculo de probabilidade de ocorrência de trovoadas; 2) se os aprendizes conseguiram representar em linguagem matemática correta o referido cálculo; 3) elencar as dificuldades mais comuns que os discentes encontraram para representar os cálculos.

Fundamentação Teórica

Nesta seção, abordam-se três aspectos para a compreensão do que foi proposto neste artigo: a probabilidade empírica, a distribuição binomial de probabilidade e por fim trovoada e sua probabilidade de ocorrência na cidade de Cuiabá.

Probabilidade Empírica

Probabilidade é um número que representa a chance de um certo evento ocorrer (LEVINE *et al*, 2015). Ainda segundo os referidos autores; há as probabilidades *a priori*, empírica e subjetiva.

Segundo ainda Levine *et al* (2015), na probabilidade *a priori* o êxito na ocorrência de um evento baseia-se no entendimento prévio do processo em questão.

Na probabilidade empírica mais especificamente, as chances de ocorrência do evento baseiam-se em observação de dados e não no conhecimento inicial do processo e necessita-se de uma pesquisa para gerar tal tipo de probabilidade (LEVINE *et al*, 2015).

A probabilidade subjetiva distingue-se das outras duas pelo fato de variar de um indivíduo para outro e fundamenta-se em uma combinação entre experiência anterior, em opinião pessoal e na análise de uma certa situação por um ser humano (LEVINE *et al*, 2015).

Distribuição Binomial de Probabilidade

Segundo Spiegel e Stephens (2009), admitindo que p seja a probabilidade de ocorrer o sucesso de um evento e que q seja probabilidade de fracasso de tal forma que q = 1 – p, a probabilidade de o evento ocorrer X vezes em N tentativas é dada pela equação 1:

$$P(X) = \binom{N}{X} p^X q^{N-X} \quad (1)$$

Na equação 1, tanto N como X são números inteiros positivos e X é menor ou igual a N. A expressão entre parênteses representa o binomial de N sobre X.

A distribuição de probabilidade binomial surge de uma experimentação em que são satisfeitas quatro condições: a) a experimentação possui uma quantidade constante de investidas; b) as investidas são independentes; c) cada investida tem apenas dois resultados possíveis; d) a chance de êxito é constante em qualquer investida (TRIOLA, 2011).

Trovoadas e sua Probabilidade de Ocorrência na cidade de Cuiabá

Segundo Varejão-Silva (2006), trovoadas são uma ou mais descargas elétricas muito intensas e abruptas identificadas por um relâmpago seguido de um trovão. Uma trovoada constitui-se por um conjunto de células em que ocorrem convecção em várias fases de evolução (VAREJÃO-SILVA, 2006). Riehl (1965) aponta as trovoadas têm três fases de desenvolvimento: nuvem cúmulo, maturidade e dissipação.

A primeira fase segundo Blair e Fite (1964), é constituída apenas por correntes convectivas ascendentes e não há precipitação. A segunda fase, por sua vez, é caracterizada por precipitação e coexistência de correntes convectivas ascendentes e descendentes (BLAIR; FITE, 1964). Finalmente, a terceira fase inicia-se quando as correntes descentes se espalham por toda a célula fazendo com que esta deixe de ser alimentada por vapor de água e assim a precipitação vai gradativamente diminuindo (BLAIR; FITE, 1964).

Na tabela 1, apresentam-se as probabilidades de ocorrência de trovoadas por mês na cidade de Cuiabá.

Tabela 1 – Probabilidade de Ocorrência de Trovoada por Meses em Cuiabá entre os anos de 2010 e 2019 com aproximação de duas casas decimais.

Mês	Probabilidade Empírica
Janeiro	0,37
Fevereiro	0,40
Março	0,39
Abril	0,24
Maio	0,08
Junho	0,04
Julho	0,02
Agosto	0,02
Setembro	0,12
Outubro	0,31
Novembro	0,41
Dezembro	0,40

Fonte: Dados elaborados a partir do código METAR obtido em www.redemet.aer.mil.br pelos autores.

Percebe-se, pelo exposto na tabela 1, que o mês em que há maior probabilidade de ocorrer trovoada é novembro (probabilidade de 41%). Observa-se ainda que nos meses que vão de novembro a março e que fazem parte do período úmido da cidade, a probabilidade de ocorrência de trovoada oscila entre 37% e 40%. Por outro lado, a probabilidade de ocorrência de trovoada nos meses de maio a agosto é menor ou igual a 8% e mais especificamente, os meses de julho e agosto têm a menor probabilidade de acontecimento do evento, isto é, 2%.

A probabilidade empírica de ocorrência de trovoadas mensais na cidade de Cuiabá foi calculada levando-se em conta o total de dias de registros de trovoadas em um mês específico durante dez anos (de 2010 a 2019) dividido pelo número total de dias que o mês teve ao longo de dez anos. Para alcançar essa meta, foram coletados dados do código meteorológico METAR no site www.redemet.aer.mil.br.

A identificação de uma trovoada no METAR acontece quando se observa a existência da sigla TS (abreviatura do inglês *thunderstorm*) na parte do código que é destinada à apresentação de fenômeno de tempo presente. Foi considerada para cômputo geral da ocorrência no METAR tanto a trovoada como fenômeno isolado como o seu acontecimento simultâneo com a chuva.

Vale ressaltar que da mesma maneira que foi calculada a probabilidade de trovoada para a cidade mencionada, seria possível também fazer a coleta de dados e obter as probabilidades em outra cidade qualquer do país bastando para isso conhecer o designador telegráfico do local.

Materiais e Métodos

Nesta seção, apresentam-se os materiais necessários à lição realizada com os quinze aprendizes, bem como os métodos empregados para a execução do ensinamento.

A experiência de ensino aqui relatada ocorreu em 5 de junho de 2023 na aula da disciplina de Física Geral 2 de uma instituição pública de ensino superior na cidade de Cuiabá, foi realizada com quinze estudantes de Engenharia e teve duração de tempo de uma hora e quarenta e três minutos. Buscava-se ampliar o estudo do processo de troca de calor por meio da convecção ocorrido na aula anterior com alguns aspectos climatológicos e probabilísticos.

Foram utilizados como materiais para a aula um quadro branco, canetas para escrever em quadro branco e um gravador contido em um telefone celular para gravar as interações entre os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

A pesquisa tem caráter qualitativo, pois as perguntas do questionário são abertas. Além disso, busca-se uma explicação para a resposta desenvolvida pelo estudante mesmo que ele não a tenha desenvolvido corretamente uma vez que é possível extrair alguns aspectos positivos do raciocínio empregado em direção à resolução adequada do problema.

Durante os primeiros cinquenta e seis minutos da aula, foi explanada a teoria de distribuição binomial, foi explicado o significado de cada uma das variáveis da fórmula e foi resolvido também com os estudantes três exercícios que envolviam o conceito.

Nos quarenta e sete minutos restantes, foi aplicado um teste Avaliativo sobre Cálculo de Probabilidade de Trovoada com Distribuição Binomial (instrumento de coleta de dados), impresso em uma folha de papel, composto por quatro questões abertas envolvendo cálculo para avaliar o que os estudantes conseguiram compreender das informações mediadas em sala. Durante a avaliação, foi colocado no quadro branco a formulação geral da distribuição binomial sem, contudo, esclarecer o significado de cada uma das variáveis da fórmula.

Como se esperava o raciocínio correto dos estudantes para resolver os quatro problemas e apenas a correta forma de representar a resposta na atividade, não foi permitida a utilização de nenhum tipo de calculadora para calcular o valor numérico dos problemas propostos.

A primeira questão visava apenas verificar se o aluno era capaz de entender o conceito de probabilidade com distribuição binomial de forma mais básica, isto é, representar apenas o binomial do número de dias do mês sobre o número desejado de trovoadas multiplicado pela probabilidade de êxito elevada a potência do número desejado de trovoadas multiplicado pela probabilidade fracasso elevado ao número de dias do mês menos o número desejado de trovoadas.

A segunda questão, por sua vez, tinha como foco analisar se os estudantes conseguiam compreender que a probabilidade de acontecerem no máximo três dias de trovoadas representava a soma das probabilidades de ocorrerem nenhuma, uma, duas e três trovoadas.

A terceira questão, por seu turno, visava observar se era possível entender que pelo menos vinte e oito dias de trovoadas em um mês de trinta dias era soma das probabilidades de ocorrerem vinte e oito, vinte e nove e trinta dias de trovoadas no mês em questão.

Finalmente, a questão de número quatro tinha como objetivo analisar o entendimento de probabilidade complementar de um evento, pois seria bastante desgastante calcular a soma das probabilidades de ocorrerem três, quatro, cinco e assim por diante até chegar a trinta e um dias de trovoadas. Assim era mais fácil expressar o resultado pelo valor da unidade menos a soma das probabilidades de ocorrerem nenhuma, uma ou duas trovoadas.

Nas situações em que o aluno não respondeu à questão, foi representada na tabela a resposta NÃO RESPONDEU.

Questionário Avaliativo sobre Cálculo de Probabilidade de Trovoada com Distribuição Binomial

1. No mês de fevereiro, qual é a probabilidade de ocorrerem 15 dias de trovoadas na cidade de Cuiabá?
   Resposta correta: $\binom{28}{15}(0{,}4)^{15}(0{,}6)^{13}$ou o equivalente numérico dessa expressão.

2. Qual é a probabilidade de ocorrerem no máximo três dias de trovoada no mês de maio na cidade de Cuiabá?
   Resposta correta: $\binom{31}{0}(0{,}08)^{0}(0{,}92)^{31}+\binom{31}{1}(0{,}08)^{1}(0{,}92)^{30}+\binom{31}{2}(0{,}08)^{2}(0{,}92)^{29}+\binom{31}{3}(0{,}08)^{3}(0{,}92)^{28}$ ou o equivalente numérico dessa expressão.

3. Qual é a probabilidade de ocorrerem pelo menos 28 dias de trovoadas no mês de abril na cidade de Cuiabá?
   Resposta correta: $\binom{30}{28}(0{,}24)^{28}(0{,}76)^{2}+\binom{30}{29}(0{,}24)^{29}(0{,}76)^{1}+\binom{30}{30}(0{,}24)^{30}(0{,}76)^{0}$ ou o equivalente numérico dessa expressão.

4. Qual é a probabilidade de ocorrerem pelo menos três dias de trovoadas em dezembro na cidade de Cuiabá?
   Resposta correta: $1-\binom{31}{0}(0{,}4)^{0}(0{,}6)^{31}-\binom{31}{1}(0{,}4)^{1}(0{,}6)^{30}-\binom{31}{2}(0{,}4)^{2}(0{,}6)^{29}$ ou o equivalente numérico dessa expressão.

Resultados e Discussão

Nesta seção, são apresentadas três subseções nesta ordem: as dúvidas dos estudantes referentes à explanação docente ao tema durante a interação; os acertos obtidos pelos alunos às questões do teste; as respostas em linguagem matemática produzidas pelos alunos em cada uma das quatro questões do questionário avaliativo sobre o cálculo de probabilidade por meio de distribuição binomial.

Interação durante a aula

O docente iniciou a aula apresentando a tabela 1 no quadro branco com as probabilidades de ocorrerem trovoadas por mês na cidade de Cuiabá e explicou como cada um desses valores foram obtidos. Procurando ressaltar que se fosse multiplicado o número de dias de um mês pelas probabilidades da tabela ter-se-ia um valor médio de quantidades de ocorrências de dias de trovoadas nos dez anos considerados.

Logo a seguir, foi apresentada pelo professor a definição de distribuição binomial de probabilidade enfatizando os conceitos de "sucesso", "fracasso", número total de possibilidades e número de eventos desejados dentro do número total de possibilidades para que fosse possível ilustrar alguns exemplos. O aluno K perguntou se o valor numérico para o fracasso deveria estar em forma percentual ou em forma de fração centesimal. Foi respondido que deveria estar na segunda alternativa que ele propôs.

A partir disso, foi exibido, como um primeiro exemplo, o cálculo da probabilidade de obter-se com uma moeda não viciada quatro caras em sete lançamentos.

No segundo exemplo, foi abordado como um problema o lançamento de um dado e desejava-se saber em um primeiro item qual seria a probabilidade de ocorrência de seis vezes o número “seis” em oito lançamentos; como segundo item, era solicitada a probabilidade de ocorrência do número “cinco” pelo menos seis vezes nos oito lançamentos e finalmente no terceiro item foi solicitada qual seria a probabilidade de obter como resultado o “um” no máximo duas vezes em oito lançamentos.

O discente G julgou confuso no segundo exemplo os termos “no máximo” e “pelo menos” escrito no segundo e terceiro item do problema e o docente explicou que no máximo é algo que não supera um determinado valor enquanto que pelo menos se trata de no mínimo um determinado valor. O aprendiz G novamente ressalta que acha confuso porque foi tentar fazer na calculadora e obteve outro valor, mas o docente esclarece que se deve ter cuidado em como inserir dados nesse equipamento, pois cada calculadora tem sua própria semântica.

No terceiro exemplo, fazendo uso da tabela 1, foi calculada qual era a probabilidade de acontecerem pelo menos três dias de trovoadas no mês de março na cidade de Cuiabá.

Antes do início da aplicação do teste de verificação de aprendizado, o aluno F perguntou se no teste, eles teriam que calcular a probabilidade para cada um dos doze meses do ano e foi esclarecido que não, apenas seria necessário resolver quatro exercícios específicos envolvendo diferentes meses.

Ao longo da aplicação do teste, o discente F pergunta o que representava o “q” da fórmula. O docente reforçou que nada mais era que a probabilidade de fracasso do evento. O discente G pediu esclarecimento sobre o que seria o sucesso e o fracasso do evento nos problemas específicos e o professor esclareceu novamente que se tratava da probabilidade de ocorrer o evento desejado e a probabilidade de não ocorrer o evento desejado respectivamente. O aluno O perguntou como faria o cálculo para o mês de fevereiro, consideraria vinte e nove ou vinte e oito dias e foi esclarecido que utilizasse vinte e oito dias, pois a distribuição binomial não permite ao número binomial números não inteiros.

O aprendiz G perguntou quantos dias têm o mês de maio, foi respondido que tinha trinta e um dias. F perguntou quantos dias tinha o mês de abril, foi respondido que tinham trinta dias. Observou-se então acidentalmente que alguns aprendizes poderiam ter dificuldade em saber exatamente quantos dias têm cada mês do ano.

Acertos obtidos pelos alunos às questões do teste

No quadro 1, representam-se as resoluções corretas de cada uma das questões propostas de acordo com os estudantes por um x (xis). Pelo exposto no quadro 1, é possível observar, por exemplo, que oito aprendizes (mais de 50%) não conseguiram acertar sequer uma questão (A, D, E, F, J, L, M e N); um acertou apenas uma questão (C); quatro acertaram duas questões (B, G, H e I) e dois conseguiram acertar todas as questões propostas (K e O).

Quadro 1 – Acertos obtidos pelos estudantes de acordo com a questão.

Aluno	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
A				
B		x		x
C	x			
D				
E				
F				
G	x	x		
H	x	x		
I	x			x
J				
K	x	x	x	x
L				
M				
N				
O	x	x	x	x
Total de Acertos por Questão	6	5	2	4

Fonte: Elaborados pelos autores (2023).

Entre tantas hipóteses para o fato de mais de cinquenta por cento dos estudantes não terem conseguido acertar nenhuma das questões, é possível elencar a ausência de bases matemáticas de nível médio e/ou fundamental, falta de atenção ao que foi explicado e até mesmo dificuldades na interpretação do texto que constitui o problema matemático.

A questão 1 teve o maior número de acertos. O que já era esperado, pois era a aplicação básica do conceito. Crê-se aqui que as questões 2 e 3 tinham o mesmo nível de dificuldade, mas pelo visto foi mais fácil para os alunos interpretarem a expressão "no máximo" que "pelo menos". Vidal e Tavares (2022) obtiveram o mesmo grau de dificuldade quando aplicaram aos alunos um teste em que tinham que resolver os problemas que envolviam estas duas expressões.

Ainda surpreende que como a questão 4 teve mais acertos do que a questão 3, pode-se dizer que foi mais fácil interpretar o conceito de probabilidade do evento complementar do que a expressão pelo menos. Para encerrar a análise, com exceção do discente B, os que não responderam corretamente à questão 1 (supostamente mais fácil), não obtiveram êxito em nenhuma outra questão.

As respostas em linguagem matemática produzidas pelos alunos em cada uma das quatro questões

Na tabela 2, observam-se as respostas dos discentes para a questão 1. Os alunos que obtiveram êxito na resolução do problema foram os alunos C, G, H, I, K e O. O aluno A produziu uma resposta que não condiz com a esperada porque atribuiu iguais probabilidades de ocorrer e não ocorrer trovoada em fevereiro além de ter se equivocado no expoente do sucesso. O discente B, por sua vez, calculou a probabilidade de ocorrer nenhuma trovoada em fevereiro. O aprendiz D disse que a probabilidade era os quinze dias esperados pelo número total de dias do mês. O estudante E admitiu que as probabilidades de sucesso e fracasso eram ambas iguais a 0,4. O discente F ao invés de representar o binomial de 28 sobre 15 representou a fração 28 sobre 15. O discente L teve a intenção de calcular a probabilidade de não ocorrer trovoadas e no expoente do sucesso colocou como se quisesse que ocorressem duas trovoadas. Finalmente os alunos J e M não responderam à questão.

Tabela 2 – Respostas em linguagem matemática dos estudantes à questão 1.

Aluno	Resposta em linguagem matemática do estudante à questão 1
A	$\binom{28}{15}(0,5)^{28}(0,5)^{13}$
B	$\binom{28}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{28}$
C	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
D	$\frac{15}{28}$
E	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,4)^{13}$
F	$\frac{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
G	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
H	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
I	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
J	Não respondeu
K	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$
L	$\binom{28}{0}(0,4)^{2}(0,6)^{26}$
M	Não respondeu
N	$\binom{28}{15}(0,5)^{15}(0,5)^{13}$
O	$\binom{28}{15}(0,4)^{15}(0,6)^{13}$

Fonte: Elaborados pelos autores (2023).

Na tabela 3, observam-se as respostas dos discentes para a questão 2. Os alunos que obtiveram êxito na resolução do problema foram os alunos B, G, H, K e O. O aluno A produziu uma resposta que não condiz com a esperada porque atribuiu iguais probabilidades de ocorrer e não ocorrer trovoada em maio além de ter se equivocado nos expoentes do sucesso e do fracasso. O discente C, por sua vez, calculou a probabilidade inspirada no conceito de probabilidade complementar. O aprendiz D calculou a probabilidade se inspirando também no conceito de probabilidade complementar além de esquecer os aspectos de sucesso e fracasso elevados a um determinado expoente de sucesso e fracasso. O estudante E tentou determinar a probabilidade de ocorrerem exatamente 3 trovoadas em maio e admitiu que a probabilidade de fracasso e sucesso fossem exatamente iguais a 0,08. O discente F utilizou as chances de fracasso e sucesso corretamente, mas se equivocou em relação aos expoentes bem como com os números binomiais que foram representados por meio de frações. O discente I calculou a probabilidade de ocorrerem três trovoadas. Os alunos J e L representaram suas respostas de uma forma que é difícil explicar em palavras o que eles compreenderam da explanação. O estudante M quase acertou a resposta, mas se equivocou no que concerne às chances de fracasso e êxito. O aprendiz N calcularia corretamente a probabilidade de ocorrência de três dias de trovoada se não tivesse errado as probabilidades de sucesso e fracasso.

Tabela 3 - Respostas em linguagem matemática dos estudantes à questão 2.

Aluno	Resposta em linguagem matemática do estudante à questão 2
A	$\binom{31}{3}(0,5)^{31}(0,5)^{28}+\binom{31}{2}(0,5)^{31}(0,5)^{29}+\binom{31}{1}(0,5)^{31}(0,5)^{30}$
B	$\binom{31}{0}(0,08)^{0}(0,92)^{31}+\binom{31}{1}(0,08)^{1}(0,92)^{30}+\binom{31}{2}(0,08)^{2}(0,92)^{29}+\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$
C	$\binom{31}{0}(0,39)^{0}(0,61)^{31}-\binom{31}{1}(0,39)^{1}(0,61)^{30}-\binom{31}{2}(0,39)^{2}(0,61)^{29}-\binom{31}{3}(0,39)^{3}(0,61)^{28}$
D	$\binom{31}{0}-\binom{31}{1}-\binom{31}{2}-\binom{31}{3}$
E	$\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,08)^{28}$
F	$\frac{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}+\frac{31}{3}(0,08)^{4}(0,92)^{27}+\frac{31}{3}(0,08)^{5}(0,92)^{26}$
G	$\binom{31}{0}(0,08)^{0}(0,92)^{31}+\binom{31}{1}(0,08)^{1}(0,92)^{30}+\binom{31}{2}(0,08)^{2}(0,92)^{29}+\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$
H	$\binom{31}{0}(0,08)^{0}(0,92)^{31}+\binom{31}{1}(0,08)^{1}(0,92)^{30}+\binom{31}{2}(0,08)^{2}(0,92)^{29}+\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$
I	$\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$
J	$\frac{31}{0}\left(\frac{0,08}{3}\right)^{0}\left(\frac{0,92}{3}\right)^{31}$
K	$\binom{31}{0}(0,08)^{0}(0,92)^{31}+\binom{31}{1}(0,08)^{1}(0,92)^{30}+\binom{31}{2}(0,08)^{2}(0,92)^{29}+\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$
L	$\binom{31}{0}(0,8)^{2}$
M	$\binom{31}{0}(0,8)^{0}(0,31)^{31}+\binom{31}{1}(0,8)^{1}(0,31)^{30}+\binom{31}{2}(0,8)^{2}(0,31)^{29}+\binom{31}{3}(0,8)^{3}(0,31)^{28}$
N	$\binom{31}{3}(0,5)^{3}(0,5)^{28}$
O	$\binom{31}{0}(0,08)^{0}(0,92)^{31}+\binom{31}{1}(0,08)^{1}(0,92)^{30}+\binom{31}{2}(0,08)^{2}(0,92)^{29}+\binom{31}{3}(0,08)^{3}(0,92)^{28}$

Fonte: Elaborados pelos autores (2023).

Na tabela 4, observam-se as respostas dos discentes para a questão 3. Os alunos que obtiveram êxito na resolução do problema foram os alunos K e O. O aluno A produziu uma resposta que refletiria um pedido de cálculo de probabilidade de ocorrência de trovoada entre um e dois dias no mês de abril caso a probabilidade de trovejar e não trovejar fossem iguais. O discente B, por sua vez, calculou a probabilidade de ocorrer pelo menos três trovoadas em abril com o auxílio de probabilidade complementar. Os aprendizes C, D e L não responderam à questão. O estudante E tentou calcular a probabilidade de ocorrerem pelo menos dois dias de trovoadas por meio do conceito de probabilidade do evento complementar, mas substituiu a probabilidade de êxito e fracasso por 0,24. Os discentes F, I, J e M obtiveram uma resposta difícil de ser explicada sob às luzes do conceito de distribuição binomial de probabilidade. O discente G tentou calcular a probabilidade de ocorrerem pelo menos vinte e oito trovoadas em abril, mas errou no momento de substituir a probabilidade de sucesso e fracasso. O aluno H calculou a probabilidade de ocorrerem no máximo duas trovoadas em abril. Por fim, o aluno N calculou a probabilidade de acontecerem no máximo vinte e oito dias de trovoadas.

Tabela 4 - Respostas em linguagem matemática dos estudantes à questão 3.

Aluno	Resposta em linguagem matemática do estudante à questão 3
A	$\binom{30}{2}(0,5)^{30}(0,5)^{28}+\binom{30}{1}(0,5)^{30}(0,5)^{29}$
B	$1-\binom{30}{0}(0,24)^{0}(0,76)^{30}-\binom{30}{1}(0,24)^{1}(0,76)^{29}-\binom{30}{2}(0,24)^{2}(0,76)^{28}$
C	Não respondeu
D	Não respondeu
E	$1-\binom{31}{0}(0,24)^{0}(0,24)^{30}-\binom{30}{1}(0,24)^{1}(0,24)^{29}$
F	$\frac{31}{3}(0,24)^{1}(0,76)^{30}-\frac{30}{2}(0,39)^{2}(0,61)^{29}$
G	$\binom{30}{28}(0,4)^{28}(0,6)^{2}+\binom{30}{29}(0,4)^{29}(0,6)^{1}+\binom{30}{30}(0,4)^{30}(0,6)^{0}$
H	$\binom{30}{0}(0,24)^{0}(0,76)^{30}+\binom{31}{1}(0,24)^{1}(0,76)^{29}+\binom{31}{2}(0,24)^{2}(0,76)^{28}$
I	$\binom{30}{8}(0,24)^{28}(0,76)^{2}$
J	$\frac{31}{30}\left(\frac{0,24}{1}\right)^{1}\left(\frac{0,76}{1}\right)^{30}$
K	$\binom{30}{28}(0,24)^{28}(0,76)^{2}+\binom{30}{29}(0,24)^{29}(0,76)^{1}+\binom{30}{30}(0,24)^{30}(0,76)^{0}$
L	Não respondeu
M	$\binom{28}{28}(0,24)^{28}$
N	$1-\binom{30}{29}(0,5)^{29}(0,5)^{1}-\binom{30}{30}(0,5)^{30}(0,5)^{0}$
O	$\binom{30}{28}(0,24)^{28}(0,76)^{2}+\binom{30}{29}(0,24)^{29}(0,76)^{1}+\binom{30}{30}(0,24)^{30}(0,76)^{0}$

Fonte: Elaborados pelos autores (2023).

Na tabela 5, observam-se as respostas dos discentes para a questão 4. Os alunos que obtiveram êxito na resolução do problema foram os alunos B, I, K e O, por outro lado J e L nada responderam. O aluno A produziu uma resposta que denota a probabilidade de ocorrerem entre uma e três trovoadas no mês de dezembro admitindo que ocorrer e não ocorrer trovoadas eram equiprováveis e iguais a 0,5. Os aprendizes C e D deveriam estar tentando resolver o problema com o conceito de probabilidade complementar, mas não foram muito felizes neste sentido. O estudante E quase acertou o cálculo, mas admitiu que as probabilidades de sucesso e fracasso eram ambas iguais a 0,4. O discente F ao invés de representar o binomial de 31 sobre 3 representou a fração 31 sobre 3 e errou os expoentes de sucesso e fracasso acerca do evento. O discente G calculou a probabilidade ocorrerem no máximo três trovoadas e o H calculou a probabilidade de ocorrerem no máximo duas. O estudante M quase acertou a resposta, mas calculou a probabilidade de ocorrerem pelo menos quatro trovoadas no mês. Por fim, N calculou a probabilidade de acontecerem pelo menos vinte e oito dias de trovoadas no mês de dezembro.

Tabela 5 - Respostas em linguagem matemática dos estudantes à questão 4.

Aluno	Resposta em linguagem matemática do estudante à questão 4
A	$\binom{31}{3}(0,5)^{31}(0,5)^{29} + \binom{31}{2}(0,5)^{31}(0,5)^{29} + \binom{31}{1}(0,5)^{31}(0,5)^{29}$
B	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29}$
C	$\binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29} - \binom{31}{3}(0,4)^{3}(0,6)^{28}$
D	$\binom{31}{0}(0,2)^{0}(0,8)^{31} - \binom{31}{1}(0,2)^{1}(0,8)^{30} - \binom{31}{2}(0,2)^{2}(0,8)^{29}$
E	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,4)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,4)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,4)^{29}$
F	$\frac{31}{3}(0,4)^{3}(0,6)^{28} + \frac{31}{3}(0,4)^{4}(0,6)^{27} + \frac{31}{3}(0,4)^{5}(0,6)^{26}$
G	$\binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} + \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} + \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29} + \binom{31}{3}(0,4)^{3}(0,6)^{28}$
H	$\binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} + \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} + \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29}$
I	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29}$
J	Não respondeu
K	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29}$
L	Não respondeu
M	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,31)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,31)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,31)^{29} - \binom{31}{3}(0,4)^{2}(0,31)^{29}$
N	$\binom{31}{0}(0,5)^{0}(0,5)^{31} + \binom{31}{1}(0,5)^{1}(0,5)^{30} + \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29} + \binom{31}{3}(0,5)^{31}(0,5)^{2}$
O	$1 - \binom{31}{0}(0,4)^{0}(0,6)^{31} - \binom{31}{1}(0,4)^{1}(0,6)^{30} - \binom{31}{2}(0,4)^{2}(0,6)^{29}$

Fonte: Elaborados pelos autores (2023).

Resumindo o que foi apresentado como equívocos dos alunos nas tabelas enumeradas de 2 a 5, pode-se dizer que os erros mais comuns cometidos foram considerar iguais probabilidades de sucesso e fracasso na probabilidade de ocorrer a trovoada, erro nos expoentes das probabilidades de sucesso e fracasso da distribuição, utilização de frações para representar números binomiais e uso do conceito de probabilidade de ocorrência do evento complementar sem a pertinência devida.

Considerações Finais

Neste artigo foi possível verificar a compreensão que os alunos tinham de cada conceito envolvido no cálculo de probabilidade de ocorrência de trovoada, analisar se eram capazes de representar em linguagem matemática correta o cálculo e elencar as dificuldades que surgiram na representação do cálculo.

Entre tantas hipóteses para o fato de mais de cinquenta por cento dos estudantes não terem conseguido acertar nenhuma das questões, é possível elencar a ausência de bases matemáticas de nível médio e/ou fundamental, falta de atenção ao que foi explicado e até mesmo dificuldades na interpretação do texto que constitui o problema matemático.

Apesar do ocorrido, não se deve abandonar a ideia de ensinar distribuições de probabilidade, pois os resultados mostram que houve alunos que muito provavelmente conseguiram compreender os conceitos mediados uma vez que resolveram corretamente os quatro problemas. Ademais, a própria dinâmica avaliativa deve ser entendida como um instrumento pedagógico que contribui para o processo de ensino-aprendizagem, visto que as questões foram posteriormente debatidas com os discentes e as dúvidas dialogadas.

O aspecto interdisciplinar proposto se constituiu basicamente de a partir da formação do fenômeno meteorológico de trovoadas pelo processo físico de convecção, poder-se ir mais além na aula seguinte com a elaboração de estatísticas sobre o fenômeno e calcular a probabilidade de ele ocorrer um certo número de dias no mês.

Seria interessante que fossem implementadas outras experiências de ensino de cálculo de probabilidade por distribuição binomial no nível superior da área de ciências exatas para outros fenômenos meteorológicos em um local que eles fossem recorrentes ao longo dos meses do ano. Sugere-se inclusive que se elaborem experiências de ensino com distribuição de probabilidade Poissoniana para a ocorrência de fenômenos ambientais raros em um determinado local, bem como o ensino de distribuição normal para que seja possível o cálculo da probabilidade de ocorrerem uma determinada faixa de valores numéricos de uma variável meteorológica qualquer.

Encerrando há de se destacar a importância da mediação realizada pelo educador no evento de ensino, porque sem a ocorrência de qualquer interação entre indivíduos, o aprendizado pode se tornar mais vagaroso ou até mesmo impossível de concretizar-se.

Referências

Blair, T. A.; Fite, R. C. (1965). *Meteorologia*. Editora Ao Livro Técnico. Rio de Janeiro.

Fernandes Filho, O. P. (2001). *O Desenvolvimento Cognitivo e a Reprovação no Curso de Engenharia*. COBENGE.

Gerab, F.; Valério, A. D. A. (2014). Relação entre o Desempenho em Física e o Desempenho em Outras Disciplinas da Etapa Inicial do Curso de Engenharia. *Revista Brasileira do Ensino de Física*, volume 36, nº 2.

Levine, D. M.; Stephan, D. F.; Krehbiel, T. C.; Berenson, M. L. (2015). *Estatística Teoria e Aplicações Usando o Microsoft Excel. Editora LTC*, 6ª edição, Rio de Janeiro.

Passos, F. G.; Vichi, C.; Duarte, F. R.; Sousa, G. M. C.; Teles, R. S.; Santos, V. M. L. (2007). Diagnóstico sobre a reprovação nas disciplinas básicas dos cursos de engenharia da UNIVASF. XXXV *Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia*. Anais.

Riehl, H. (1965). *Meteorologia Tropical*. Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro.

Spiegel, M. R.; Stephens, L. J. (2009). *Estatística Coleção Schaum*. Editora Bookman, 4ª edição, Porto Alegre.

Triola, M. F. (2011). *Introdução à Estatística*. Editora LTC, 10ª edição, Rio de Janeiro.

Varejão-Silva, M. A. (2006). *Meteorologia e Climatologia*. Versão Digital 2, Recife.

Vidal, L.A.; Lima, G. F.; Rosa, F. A.; Tavares, A. S. (2020). Melhorando o Aprendizado de Probabilidade na Distribuição Binomial através do Número de Dias de Precipitação Mensal em Cuiabá. *Experiências em Ensino de Ciências* V.15, Nº 2. p501-512. https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/737. Consultado em 02 de julho de 2023.

Vidal, L. A.; Tavares, A. S. Ensino de Distribuição Binomial e Trinomial utilizando como Motivação o Campeonato Brasileiro de Futebol. (2023). *Experiências em Ensino de Ciências* V.17, Nº 3. p448-459. https://if.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/1063/955. Consultado em 02 de julho de 2023.

Vidal, L.A.; Cunha, C.R. (2019). A reprovação nas disciplinas de Física na engenharia causada pela ausência de bases matemáticas nos Ensinos Fundamental e Médio. *Experiências em Ensino de Ciências,* v.14, n.1. https://fisica.ufmt.br/eenciojs/index.php/eenci/article/view/50. Acessado em 05 de julho de 2023.