

ENSAYANDO LA GENERACIÓN DE COMPETENCIAS EN PROCESOS DE MODELADO EN CIENCIAS E INGENIERIA PARA EL PROFESORADO DE FISICA

Generating competences in modeling processes in science and engineering for physics teachers

Carlos Saúl, Buitrago [Buitragoc36@gmail.com]

Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico de Caracas, Dpto. Matemática y Física. Maestría en Enseñanza de la Física. Caracas, Venezuela.

Recibido em: 30/08/2023

Aceito em: 19/12/2023

Resumen

En su proceso de formación, los profesores de Ciencias, en particular los de Física, necesitan generar competencias para su praxis educativa en cualquiera de las áreas disciplinares de la ciencia o ingeniería, en la resolución de problemas de importancia práctica que son modelados mediante ecuaciones diferenciales cuyas soluciones por métodos analíticos solo se logran obtener para casos muy particulares en los cuales se tienen ciertas geometrías, condiciones de valor inicial, condiciones de contorno y/o sistemas de cargas o de fuerzas muy particulares. Para afrontar la solución de esta dificultad se debe recurrir a métodos numéricos y simulaciones computacionales, los cuales permitirán aportar interpretaciones aproximadas en cuanto al análisis y diseño. Este ensayo didáctico dividido en cuatro etapas se aplicó en un curso de postgrado para profesores de Física, con el fin de iniciarlos en el desarrollo de competencias relacionadas con: la construcción de modelos matemáticos de sistemas reales (variables de estado, condiciones y ecuaciones representativas); la elección de los métodos matemáticos aproximados para encontrar las soluciones analíticas; y por último, la construcción de algoritmos para simular el comportamiento de las variables de estado con el fin de cortejar, interpretar y analizar los resultados simulados, con los obtenidos por la vía analítica y experimental.

Palabras-clave: formación docente, procesos de modelado, sistema real, experimento artificial, simulación computacional.

Abstract

In their training process, Science teachers, particularly Physics teachers, need to generate skills for their educational praxis in any of the disciplinary areas of science or engineering, in solving problems of practical importance that are modeled using differential equations. whose solutions by analytical methods can only be obtained for very particular cases in which there are certain geometries, initial value conditions, boundary conditions and/or very particular load or force systems. To address the solution to this difficulty, numerical methods and computer simulations must be used, which will allow providing approximate interpretations regarding analysis and design. This didactic essay divided into four stages was applied in a postgraduate course for Physics teachers, in order to initiate them in the development of skills related to: the construction of mathematical models of real systems (state variables, conditions and representative equations) ; the choice of approximate mathematical methods to find analytical solutions; and finally, the construction of algorithms to simulate the behavior of state variables in order to combine, interpret and analyze the simulated results, with those obtained through analytical and experimental means.

Keywords: teacher training, modeling processes, real system, artificial experiment, computer simulation.

INTRODUCCIÓN

En cualquiera de las áreas disciplinares de la ciencia o de la ingeniería surgen problemas de importancia práctica que son modelados mediante ecuaciones diferenciales, bien sea ordinarias o parciales, cuya deducciones no resultan muy difíciles, pero sus correspondientes soluciones por métodos exactos de análisis solo se logran obtener para casos muy particulares; en los cuales se tienen ciertas geometrías, condiciones de valor inicial, condiciones de contornos y/o sistemas de cargas o de fuerzas muy particulares. A pesar de que este tipo de soluciones son las que aportan mayor información sobre el conjunto de variables involucradas en el problema, en la práctica surgen situaciones donde no se pueden obtener tales soluciones analíticas. Para afrontar esta dificultad se debe recurrir a métodos numéricos, los cuales permitirán aportar interpretaciones en cuanto al análisis y diseños con un alto grado de sofisticación y precisión.

Este tipo de problemas y sus métodos de solución, los cuales se consideran de importancia vital para la formación científica, en la mayoría de los casos en Venezuela, no se contemplan en los contenidos curriculares de la formación de docentes de Física e Ingeniería, incluso, en los programas de formación de ingenieros a nivel del pregrado casi no son tratados con la formalidad adecuada, dejándose su tratamiento resolutivo e interpretativo para cursos de postgrado.

En este trabajo, se presenta una propuesta didáctica relacionada con los procesos de modelado en Ciencias e Ingeniería, dirigida a la formación de docentes que participan en el Programa de la Maestría en Enseñanza de la Física del Instituto Pedagógico de Caracas, de la Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Particularmente, la propuesta didáctica se dividió en cuatro etapas, y pudo a modo ensayo, ser usada en el curso de Mecánica Clásica para mostrar y discutir con los participantes las etapas que conllevan a la solución de un problema de Física e Ingeniería, sin pretender en ningún momento, desde el punto de vista metodológico, la realización de un estudio sistemático que permitiese recopilar evidencia de posibles indicadores relacionados con el logro de competencias por parte de los participantes del curso. Las cuatro etapas estuvieron relacionadas con el estudio de sistemas físicos reales para la construcción de modelos matemáticos representativos, las técnicas de solución asociadas a los modelos matemáticos, el modelaje virtual del sistema real a través de simulaciones computacionales, el estudio del comportamiento de las variables, y el cotejo, interpretación y análisis de los resultados con respecto a las soluciones analíticas.

A. El programa de formación de postgrado de docentes de Física y la naturaleza de sus estudiantes

La Maestría en enseñanza de la Física del Instituto Pedagógico de Caracas consta de un currículo que busca desarrollar competencias científicas formales en el docente de Física e Ingeniería, en los ámbitos teórico y experimental de la misma disciplina, así, como en su aprendizaje, enseñanza y didáctica, en lo que atañe a la educación científica. Además, todo el currículo, en su esencia, tiene como eje central la formación en el área de investigación asociada a los principales problemas que giran en torno a la Educación de la Física.

En cuanto a los contenidos relacionados con la formación disciplinar, el programa cuenta con tres cursos obligatorios: Mecánica Clásica, Electromagnetismo y Física Cuántica, además, de varios cursos electivos, entre los cuales se pueden mencionar, Termodinámica, Mecánica Clásica Contemporánea, Diseños Experimentales, entre otros.

El curso de Mecánica Clásica incluye contenidos relacionados con la Cinemática y Dinámica de la partícula estudiada desde varias formulaciones, entre ellas la Newtoniana, el Cálculo de Variaciones

y una introducción a la Mecánica Lagrangiana. Igualmente, se estudian la Cinemática y Dinámica de las distribuciones continuas (sólo desde la formulación newtoniana), haciendo hincapié en el cuerpo rígido, los fluidos y la transferencia de calor.

Los profesionales que entran a cursar estudios en esta Maestría, en su mayoría son docentes de Física egresados de los distintos centros de formación pedagógica en Venezuela que buscan profundizar sus conocimientos en la disciplina y en la investigación asociada a los problemas que giran en torno a su educación, además, de ingenieros y físicos, que ingresan a la maestría para obtener estudios docentes que les permitan ejercer su praxis educativa en instituciones públicas y privadas, y que igualmente se inician en la investigación relacionada con la educación de la disciplina.

B. Población, momento de aplicación de la propuesta y recursos de estudio

El curso de Mecánica Clásica, para el segundo semestre del año 2022 contaba con cinco participantes, egresados de centros de formación pedagógica que estaban dictando cursos de Física y Matemática, tanto a nivel medio como universitario en Venezuela. Para el momento de la aplicación del ensayo ya se habían desarrollado los contenidos relacionados con la Cinemática y Dinámica de la Partícula desde la formulación Newtoniana y el Cálculo de Variaciones, con una introducción al estudio del medio continuo, particularmente el cuerpo rígido, a partir de la formulación Lagrangiana.

La aplicación del ensayo por parte del docente del curso, tuvo una duración de ocho semanas, con un promedio semanal de tres horas de clase, una semana presencial y la otra online, además, de otras horas estudio en casa (el docente recomendó 10 horas en promedio) que usó cada participante para cumplir con la revisión de los recursos y asignaciones de cada etapa. En las clases presenciales el docente presentó y discutió con los participantes cada una de los aspectos particulares de cada etapa del ensayo, relacionados con el proceso de modelado.

Para el desarrollo de las etapas por cada semana, se les proporcionó a los participantes una serie de recursos teóricos en formato digital (PDF y audiovisuales), los cuales le fueron entregados por el docente del curso en carpetas individuales compartidas de Google Drive para alojarlas en una cuenta Gmail correspondiente al curso de Mecánica, además, de algunas asignaciones que se describen a continuación en el desarrollo de cada etapa.

C. Propuesta general del abordaje de problemas en Ciencias e Ingeniería

Etapa 1 (situación problema)

Sistema Real (semana 8). Se contempló la descripción esquemática general para el proceso de modelado y simulación de cualquier problema en ciencia o ingeniería, el cual se muestra en la Fig. 1. A los participantes se les presentó el sistema real como aquel fenómeno natural del cual se extrae información medible o se presenta una situación problemática que puede ser determinada o resuelta mediante la experimentación, además, de la deducción analítica y numérica, respectivamente.

Se discutió con los participantes que el problema del sistema real a resolver se transforma en un modelo matemático, mediante la inclusión de un conjunto de leyes físicas y de principios de conservación que pueden describir al sistema en cuestión sustentado en base de una teoría física; este proceso corresponde a la flecha con la denominación **Abstracción** en la figura 1, además, también se discutió que el planteamiento aproximado de estos aspectos requiere del sentido común y de cierta experiencia del participante o analista contemplada en su conocimiento previo.

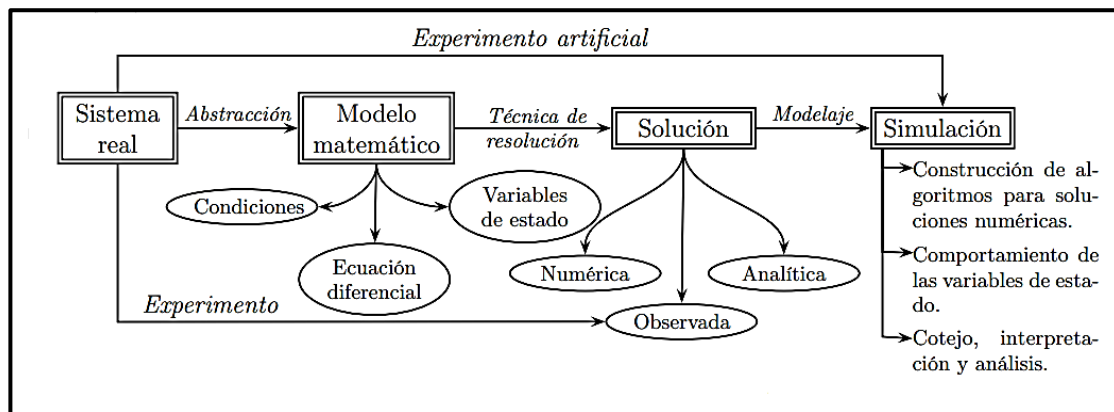


Figura 1. Esquema general de abordaje de un problema en ciencia e ingeniería.

Luego, se les presentó a los participantes como sistema real, el estudio del movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento, el cual se describió mediante una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, lineal y a coeficiente constante. Durante las dos semanas de duración de esta etapa, los estudiantes analizaron los casos donde el sistema se encuentra bajo perturbación externa (forzado), desde una formulación teórica (Newtoniana) a partir de los fundamentos necesarios para encontrar las distintas soluciones analíticas (sobreamortiguamiento, subamortiguamiento y críticamente amortiguado). El sistema fue representado pictóricamente de acuerdo a la figura 2.

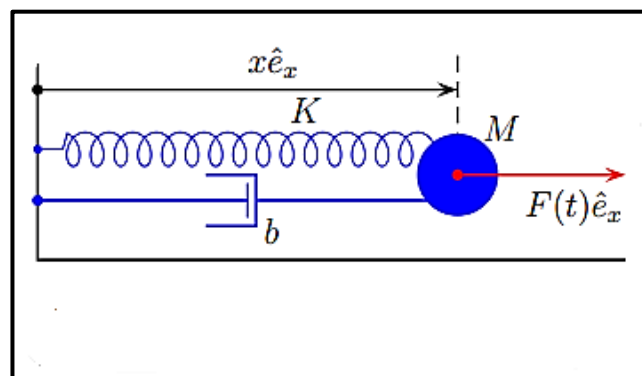


Figura 2. Representación pictórica del *sistema real* realizada por los participantes.

Etapa 2 (Modelo matemático)

En esta etapa de la propuesta, la cual se desarrolló en tres semanas (de la novena a la onceava), se abordó el modelado matemático y la generación de soluciones. Vale la pena mencionar que la solución de algún modelo matemático es una de las etapas fundamentales para la validación de las correspondientes teorías y de los modelos subyacente a éstas, siendo el punto de partida de cualquier proceso de simulación y animación del sistema de interés. El obtener soluciones de algún modelo matemático puede ser uno de los procesos más complicados en el análisis de un determinado problema, debido a la complejidad de la ecuación a resolver, las condiciones de borde a satisfacer o las condiciones iniciales que se pueden presentar. Sin embargo, existe una vasta diversidad de técnicas para la solución de una amplia gama de modelos matemáticos, donde todas ellas apuntan a la resolución de ecuaciones diferenciales. En esta etapa el ensayo se centró en mostrar sa los participantes algunas de las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, centre ellas, el método de encontrar soluciones irreducibles y cómo generar a partir de ellas otro tipo de soluciones. A continuación, se detallan las actividades aplicadas en estas tres semanas:

(i) *las variables de estado presentes (semana 9)*. En términos generales, éstas correspondieron a un conjunto de magnitudes físicas específicas que surgieron de aplicar leyes físicas y principios de conservación; una vez identificadas por los participantes todas las variables de estado Ψ y los

parámetros intervinientes en el sistema real, procedieron a la construcción de la ecuación que determina los diversos valores de Ψ en diferentes puntos del espacio y tiempo. En este sentido, la variable de estado es descrita por un campo tensorial que depende de puntos del espacio \vec{r} y del tiempo t , con lo cual $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$. Los participantes indagaron que la ecuación que rige a la variable de estado puede ser escrita en tres formulaciones: *formulación diferencial*, *formulación variacional* y *formulación integro-diferencial*. A continuación, como ejercicio y en función de reforzar la representación diferencial de las ecuaciones, se les presentó a los participantes la tabla 1, la cual muestra tres tipos de sistemas representados por sus ecuaciones diferenciales en función de la variable de estado, el operador diferencial, la constante de acoplamiento dimensional (Λ) y la fuente.

TABLA 1. Caracterización de un sistema según su modelo matemático.

Tipo de sistema	Variable de estado $\Psi(t)$	Operador diferencial \mathcal{L}_t	Valor de Λ	Fuente $\mathcal{S}(\vec{r}, t)$
Oscilaciones libres de un sistema masa-resorte.	Deformación de un resorte $x(t)$.	$\frac{d^2}{dt^2}(\star) + \frac{K}{M}(\star)$	$\frac{1}{M}$	F_0
Oscilaciones amortiguada de un sistema masa resorte.	Deformación de un resorte $x(t)$.	$\frac{d^2}{dt^2}(\star) + \frac{b}{2M} \frac{d}{dt}(\star) + \frac{K}{M}(\star)$	$\frac{1}{M}$	F_0
Circuito RLC de corriente continua.	Carga $Q(t)$.	$\frac{d^2}{dt^2}(\star) - \frac{R}{L} \frac{d}{dt}(\star) + \frac{1}{LC}(\star)$	$\frac{1}{L}$	ε

(ii) *la ecuación que rige el comportamiento futuro de las variables de estado o el valor adquirido por estas variables en cada punto del espacio (semana 10)*. Para la construcción de la ecuación que rige al sistema real, se les presentó a los participantes el análisis del movimiento de un cuerpo de masa M que se encuentra sujeto a un resorte y a un amortiguador, despreciando cualquier efecto gravitacional. Identificaron a partir de la Fig. 2, que el resorte presenta una constante de rigidez K y le ejerce una fuerza al cuerpo modelada por la expresión $-Kx(t)\hat{e}_x$, siendo $x(t)$ la posición del cuerpo medida desde la pared en el instante de tiempo t . El amortiguador presenta una constante de amortiguamiento b y le ejerce una fuerza al cuerpo dada por la expresión $-b\dot{x}(t)\hat{e}_x$, siendo $\dot{x}(t)$ la velocidad del cuerpo en el instante de tiempo t . Adicionalmente, sobre el cuerpo se supone ejercida una fuerza externa en dirección horizontal dada por $F(t)\hat{e}_x$, activada por un mecanismo exterior al sistema que la hace fluctuar con frecuencia y amplitud constante en el tiempo generalmente. Aplicando la segunda ley de Newton y proyectando ésta sobre la dirección horizontal los participantes construyeron el modelo matemático, el cual expresaron como

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2(t) = \frac{1}{M}F(t) \quad (1)$$

Esta es la ecuación caracterizada en la segunda línea del Cuadro 1, cuando se considera que la fuerza externa $F(t)$ es una constante F_0 . Además, en el modelo matemático (1) se los participantes definieron los siguientes parámetros:

$$\gamma = \frac{b}{2M} \quad (2)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (3)$$

(iii) *las condiciones sobre las variables de estados (semana 11)*. Se le propuso a los participantes estudiar las posibles condiciones físicas del sistema. Entre ellas, los participantes identificaron las de valor inicial, de frontera o contorno, y algunas ecuaciones constitutivas. Se les explicó que un problema de valor inicial se identifica cuando se especifican los datos de la variable de estado (junto con el de todas sus derivadas) en un momento determinado o lugar especificado, en cambio un problema con condición de contorno o de frontera se identifica cuando se especifica los datos de la

variable de estado en la frontera del dominio del sistema real. Mientras, las ecuaciones constitutivas proporcionan un conjunto de relaciones entre algunas magnitudes físicas que son características del medio material considerado en el sistema real.

Seguidamente se discutió con los participantes que este aspecto formal del modelado en Ciencias Ingeniería se debe tomar en cuenta en la formulación diferencial es el dominio D del sistema (donde se desea hallar la solución del problema) y las condiciones de borde que deben satisfacer las variables de estados en la frontera del dominio ∂D . La frontera de un dominio se encuentra limitada por una región de una dimensión menor, por ejemplo, la frontera de un volumen es la superficie que lo contiene, mientras que la frontera de una superficie abierta es su contorno (representada por una curva o un conjunto de líneas) y la frontera de una línea curva corresponde a los puntos extremos de dicha curva. No obstante, hay dominios que no presentan fronteras, tal es el caso de las superficies cerradas (por ejemplo, una esfera) o curvas simples cerradas (por ejemplo, una circunferencia), también es posible encontrar sistemas cuyos dominios se extienden al infinito los cuales denotaremos como ∂D^∞ . La ecuación que gobierna el comportamiento de las variables de estados deben cumplirse en cualquier punto del dominio e incluso en su frontera, sin embargo, la determinación de las variables de estados estará fuertemente ligada al valor que tomen estas variables en la frontera. Las condiciones de fronteras presentadas a los participantes fueron:

Condición de Dirichlet (o de primer tipo): esta condición se obtiene al especificar los valores de todas las variables de estados en la frontera, esto se puede hacer definiendo un campo vectorial o una función escalar que solo existe en puntos sobre la frontera. Si los valores de esta función en la frontera son tomados nulos, entonces la condición de Dirichlet se denomina homogénea.

Condición de Neumann (o de segundo tipo): esta condición se obtiene al especificar los valores de las derivadas de las variables de estados en la dirección perpendicular a la frontera.

Condición de Robin (o de tercer tipo): esta condición se obtiene al especificar una combinación lineal de las condiciones de Dirichlet y Neumann en la frontera, donde los coeficientes de la combinación lineal son no nulas de los puntos en la frontera.

Condición de borde periódica (o de cuarto tipo): esta condición está presente cuando se identifican dos puntos de la frontera con posiciones definidas (por ejemplo, cuando se identifican los puntos extremos de un segmento de recta para generar una circunferencia) o en dominios que no poseen fronteras, por lo que al tomar una superficie cerrada o una curva simple cerrada que conecte a los puntos identificados, se impone que las variables de estados tomen el mismo valor después de recorrer o dar una vuelta completa.

Condición mixta (o de quinto tipo): esta condición está presente cuando se utilizan diferentes condiciones de bordes sobre partes diferentes de la frontera del dominio. Por ejemplo, al subdividir la frontera en dos regiones e imponer condición de Dirichlet en una región y condición de Neumann en la otra se dice que la condición de frontera es mixta.

Condición inicial (o de sexto tipo): aquellos problemas que presentan un régimen transitorio (dependencia temporal) tienen la particularidad de que las variables de estados son funciones explícitas del tiempo t , además de depender de los puntos del espacio. La situación inicial ocurre en un determinado tiempo t_0 fijado por el analista (habitualmente se elige $t_0 = 0$) y con ello se debe especificar cuanto vale la variable de estado en esta situación inicial.

Además, se aprovechó el cierre de esta etapa para reforzar el tema relacionado con las ecuaciones constitutivas, presentando a los participantes algunos casos ejemplos relacionados con los medios continuos y el fenómeno de transporte. Los ejemplos sirvieron para discutir con los participantes que este tipo de condiciones se impone en la mayoría de los casos sobre el sistema en cuestión, y que además, dependen un conjunto de variables de estados o posibles correlaciones entre dichas variables

y la fuente (carga, masa, calor, entre otras). Dentro de la explicación se le reforzó la idea de aquellos materiales o sustancias a los cuales se les impone una ecuación constitutiva específica cuya relación sólo depende de la organización molecular interna y del problema que se esté trabajando.

Por último, se les mostró a los participantes que las condiciones iniciales fijadas para el sistema real se fijaron a partir de la expresión (4a) y (4b).

$$x(0) = x_0 \text{ (posición inicial)} \quad (4a)$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \text{ (posición inicial)} \quad (4b)$$

Etapa 3 (Soluciones)

En la doceava y treceava semana, se les presentó a los participantes el modelo matemático y sus condiciones iniciales. En la fase de discusión se indagaron y tomaron decisiones acerca de la técnica a emplear para la resolución correcta de (1) y la determinación de las variables de estado, procediendo a revisar las posibles soluciones del problema planteado según la técnica empleada. En este sentido, se les presentó a los participantes la posibilidad de tres tipos fundamentales de soluciones: (a) *analítica, las cuales permiten escribir a las variables de estados por medio de expresiones matemáticas en forma exacta o en forma de series*; (b) *observada, son aquellas que se obtienen mediante medición directa de alguna variable de estado en el sistema real, para su determinación se requiere de algún diseño y montaje experimental*; (c) *numérica, cuando el modelo haya sido verificado y no sea posible emplear algún método de resolución analítico (debido a la complejidad del modelo) se emplean métodos numéricos, los cuales permiten obtener una aproximación de las variables de estado respecto a sus valores analíticos*. Estos valores numéricos resultan ser soluciones aproximadas de las ecuaciones que rigen al fenómeno en estudio.

(i) **Solución analítica (semana 12 -13)**. A pesar de que hizo énfasis en la solución puramente analítica, esta parte de la etapa 2 se presentó como la más difícil de enfrentar por el participante, ya que requirió de conocimiento matemático previo para determinar el tipo de solución. Los participantes manifestaron que a pesar de haber abordado la resolución de ecuaciones diferenciales en cursos de pregrado, el tiempo sin hacer usos de ellas en su praxis educativa les había hecho olvidar las técnicas aprendidas.

El planteamiento de las soluciones constó de las siguientes partes,

- Parte 1, *soluciones homogéneas irreducibles*, para esto se planteó la idea de que existirán un grupo de soluciones donde $x_h(t + \tau)$ y $x_h(t)$ sean proporcionales (es decir, no sean independientes), tales soluciones homogéneas son llamadas irreducibles y verifican la siguiente relación de proporcionalidad

$$x_h(t + \tau) = f(\tau)x_h(t) \quad (5)$$

Siendo las únicas funciones que verifican la relación (3) aquellas que son del tipo exponencial, por lo tanto, se tiene que la estructura de la solución debe ser del tipo:

$$x_h(t) = e^{\lambda t} \quad (6)$$

donde λ es una constante a determinar para que (4) cumpla con (1), con las condiciones adecuadas.

- Parte 2, *determinación de λ* , para ello se requiere que (4) verifique (1), con lo cual los participantes obtuvieron dos posibles soluciones,

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-\gamma t} e^{-\sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} t} \quad (7a)$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-\gamma t} e^{\sqrt{\gamma^2 + \omega_0^2} t} \quad (7b)$$

- Parte 3, *independencia de las soluciones*, Para estudiar la independencia lineal de estas soluciones homogéneas irreducibles se evalúa el Wronskiano de (7), esto es,

$$W = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \lambda_1 x_1(t) & \lambda_2 x_2(t) \end{vmatrix} = 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} e^{-2\gamma t} \quad (8)$$

Se les explicó a los participantes que el wronskiano aporta dos informaciones vitales para el desarrollo futuro de la solución del problema. La primera información es que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ serán dos soluciones homogéneas irreducibles independientes, a menos que $\gamma = \omega_0$. En este caso, la no nulidad del Wronskiano, permitirá escribir cualquier solución homogénea como una combinación lineal de (7); y la positividad de Wronskiano permite clasificar al conjunto $\{x_1(t), x_2(t)\}$ como una base orientada para un espacio vectorial bidimensional. La segunda información es que las soluciones homogéneas irreducibles dadas en (7) pierden la independencia lineal (de hecho, no habría dos soluciones sino una) y en este caso habrá que conseguir otra solución mediante la ecuación de Abel. En este contexto, el modelo puede ser clasificado según los valores que tomen los parámetros γ y ω_0 (French, 1974). El sistema es llamado Sobreamortiguado cuando $\gamma > \omega_0$; Subamortiguado cuando $\gamma < \omega_0$ y críticamente amortiguado cuando $\gamma = \omega_0$.

- Parte 4, *obtención de las soluciones particulares*. Se permitió en esta etapa que el caso a estudiar fuese seleccionado por los participantes. La decisión tomada por el grupo correspondió con las oscilaciones forzadas, donde se consideró una fuerza forzadora constante $F(t)$ de la forma

$$F(t) = F_0 \quad (9)$$

Para este caso general, se estudiaron las soluciones del sistema en los tres regímenes, y se mostraron a los participantes por medio de representaciones como la presentada en la figura 3.

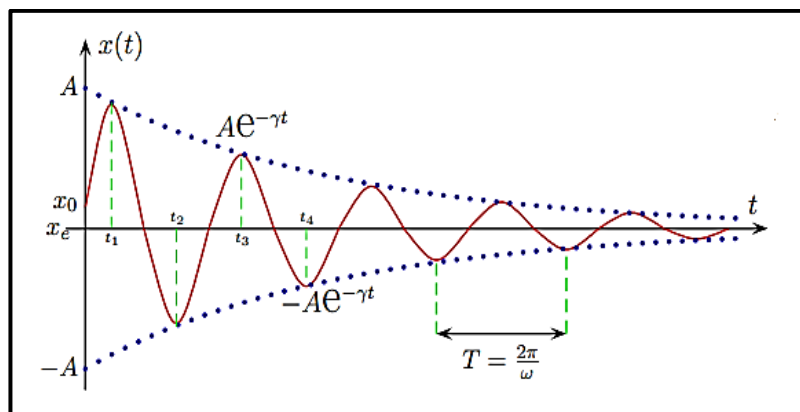


Figura 3. Situación gráfica general de un movimiento subamortiguado con posición inicial mayor a la posición de equilibrio ($x_0 > x_e$). Las curvas punteadas en azul representan la gráfica de la atenuación exponencial, mientras la curva continua (en rojo) es la descripción del movimiento oscilatorio.

Etapa 4 (simulación)

(i) *Construcción de algoritmos para soluciones numéricas (semana 14)*. En esta última etapa, se trabajó con los participantes en las líneas de código para la graficación y animación de los distintos desplazamientos que sufre una masa atada a un resorte con y sin amortiguamiento, bajo la presencia de una perturbación externa constante. Para el estudio de sistemas con perturbaciones externas que varían con el tiempo puede consultarse la referencia de (Lázaro, 2015). Con la finalidad de realizar

gráficos y animaciones se requerirán valores específicos de los parámetros, los cuales pueden ser validados por el analista, en este caso el participante. A continuación, se presenta el *código 1* desarrollado por los participantes, basado en el lenguaje de programación del programa gratuito en su versión educativa en la nube Wolfram Mathematica, que permite generar las distintas soluciones del problema planteado.

1. `Clear[x, u, t0, t, x0, v0]`
2. `x[t_, x0_, v0_] := u[t]/.Flatten[DSolve[{u''[t] + 2γu'[t] + ω0 2u[t] == F0 M, u[0] == x0, u'[0] == v0}, u[t], t0].{t0 → t}];`
3. `xh[t_, x0_, v0_] := u[t]/.Flatten[DSolve[{u''[t] + 2γu'[t] + ω0 2u[t] == 0, u[0] == x0, u'[0] == v0}, u[t], t0].{t0 → t}];`
4. `xp[t_, x0_, v0_] := x[t_, x0_, v0_] - xh[t_, x0_, v0_];`
5. `Clear[M, Ke, b, F0, γ, ω0] M = 4; Ke = 100; b = 5; F0 = 1000; γ = b 2M; ω0 = q Ke M;`
6. `If[TrueQ[γ == 0] == True, ω = ω0; Print["Sin amortiguamiento"], If[TrueQ[γ > ω0] == True, ω = p γ 2 - ω0 2; Print["Sobreamortiguado"], If[TrueQ[γ < ω0] == True, ω = p γ 2 - ω0 2; Print["Subamortiguado"], ω = 2π; Print["Critico"]]]]`
7. `n = 1.5; ymin = -2; ymax = 26; Plot[{x[t, x0, v0], xp[0, x0, v0]}, {t, 0, Abs[n] * 2π ω}, PlotRange -> {{0, Abs[n] * 2π ω}, {ymin, ymax}}, AxesLabel -> {Style["t", 20], Style["x(t)", Large]}, PlotStyle -> {{Brown}, {Black, Dashed}}] Clear[n, ymin, ymax] (Lázaro, 2015).`

A continuación, se estudió con los participantes el significado de cada línea presentada en el Código 1, haciendo hincapié en que cada valor numérico puede ser modificado y adaptado al problema particular que se esté enfrentado. En este sentido, se llegó a la conclusión de que este código era un algoritmo adecuado para el abordaje de problemas relacionados con las oscilaciones en diversas situaciones físicas, libre, amortiguado, y forzado. A continuación, la descripción de cada línea del código:

Línea 1. Limpia o inicializa las variables que se utilizan en la EDO¹ y en la solución de ésta, así como las variables que indican las condiciones iniciales.

Línea 2. Se define una función de tres variables $x[t, x_0, v_0]$, el primer argumento indica la variable temporal, mientras que los otros dos son para especificar la posición y velocidad inicial (elegida en $t = 0s$). Esta función proporciona el desplazamiento del cuerpo atado al resorte, es decir, proporciona la solución de la EDO).

Línea 3. Proporciona la solución homogénea de la EDO que se está resolviendo. Recuerde que se ha impuesto una perturbación externa constante y por ello la EDO es no homogénea. En esta línea se debe tener cuidado con las condiciones iniciales que se proporcionen, ya que estas condiciones iniciales se encuentran fijadas por las condiciones iniciales de la solución general como los valores de la solución particular en el instante inicial. Es por ello que se debe conocer la solución particular en $t = 0s$ antes de pasar a la siguiente línea.

Línea 4. Proporciona la solución particular, la cual debe ser conocida previamente.

Línea 5. Esta línea consta de tres etapas: La primera etapa consiste en limpiar los valores de los parámetros del sistema. La segunda etapa define los valores que se le asignarán a los parámetros del sistema que se esté estudiando. La tercera y última etapa se definen los valores para los parámetros γ y ω_0 , con los cuales se clasificará el sistema.

Línea 6. Se clasifica el sistema según los valores proporcionados en la línea anterior, además se define el parámetro ω . Cuando el sistema no presenta amortiguamiento ($\gamma = 0s^{-1}$) dicho parámetro corresponde a la frecuencia de oscilaciones libres. Cuando el sistema sea sobreamortiguado la cantidad ω define al parámetro positivo $\Omega = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$. Cuando el sistema sea subamortiguado el

¹ EDO: ecuación diferencial ordinaria.

parámetro ω define la frecuencia de las oscilaciones amortiguadas. Cuando el sistema sea críticamente amortiguado se define un parámetro positivo igual a 2π por conveniencia (esta elección se explicará más adelante).

Línea 7. Esta línea consta de tres etapas: La primera etapa consiste en definir los parámetros del gráfico, estos son n , y_{max} y y_{min} . El valor de n indicará el número de oscilaciones que se quieren generar para los casos en que el sistema oscile, si por el contrario el sistema no oscila podrá elegirse de acuerdo a $t_{max} * \omega / 2\pi$ donde t_{max} indicará el máximo valor del eje del tiempo. Para el caso de amortiguamiento crítico se tiene que $\omega = 2\pi$ con lo cual $n = t_{max}$. Los parámetros y_{max} y y_{min} corresponden a los valores máximos y mínimos que tendrán el eje de las ordenadas, es decir, la cota superior e inferior para los desplazamiento del cuerpo. La segunda etapa gráfica tanto la solución general como la solución particular evaluada en instante inicial, esta última gráfica indicará la línea a la cual decaen los movimientos sobreamortiguado o críticamente amortiguado, o la línea alrededor de cual oscila en los casos de movimiento subamortiguado u oscilaciones libres. Finalmente, se limpian los parámetros de la gráfica.

(ii) Comportamiento de las variables de estado, cotejo, interpretación y análisis (Semana 15). Los participantes a partir del *código 1* en Wolfram Programming Lab (2021), ejecutaron cada línea de comando para graficar las soluciones, haciendo cuidadosas modificaciones a partir de valores numéricos y la especificación de los valores que deben tomar las condiciones iniciales, propuestos por el docente del curso. Los casos de estudio estuvieron relacionados **con un sistema sujeto a una perturbación externa constante: sin amortiguamiento, con sobreamortiguamiento, y con amortiguamiento**. Las unidades de las magnitudes y parámetros corresponden al Sistema Internacional de Unidades, como ejemplo se presenta el tercer estudio.

Tercer estudio, estudiar un sistema masa-resorte sujeto a una perturbación externa constante con amortiguamiento para los parámetros dados por $M = 4$, $K_e = 100$, $\gamma = 5$ y $F_0 = 1000$, y los valores iniciales:

- $x_0 = 25$ y $v_0 = 20$, representar con una curva marrón.
- $x_0 = 25$ y $v_0 = 0$, representar con una curva azul.
- $x_0 = 25$ y $v_0 = -$ representar con una curva roja.
- Consolidar las tres gráficas en una sola utilizando los siguientes parámetros de gráfico $n = 4$, $y_{min} = -2$ y $y_{max} = 26$.

A partir de las soluciones numéricas arrojadas por la simulación los participantes llevaron a cabo el proceso de simulación, cotejo, interpretación y análisis para cada caso, como cierre del esquema general según la figura 1. A continuación se muestra un ejemplo de la solución obtenida por los participantes (se han tomado extractos de la interpretación realizada por el docente del curso a las respuestas de los participantes para el tercer caso de estudio).

Solución del tercer estudio

Curvas obtenidas para el tercer caso de estudio a través de solución numérica (animación)

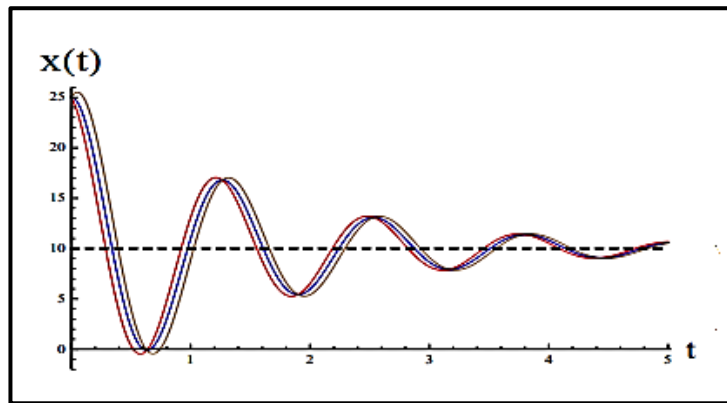


Figura 4. Se mostra el resultado gráfico obtenido por los estudiantes a partir del resultado numérico simulado.

Interpretación de la solución numérica (animación). La gráfica permite observar la evolución temporal de los desplazamientos del sistema asociado al tercer caso de estudio. Para esta solución en específico, la velocidad inicial para las curvas marrón, azul y roja son positiva, nula y negativa, respectivamente.

Cotejo. Los resultados gráficos representados en la figura 4, obtenidos de la solución numérica simulada muestran correspondencia con la solución gráfica de la figura 3 producto de la solución analítica, por lo cual se puede concluir que la solución numérica es consistente aproximadamente con la solución obtenida por la vía analítica.

Análisis. Se observa una clara atenuación de la amplitud para las tres curvas obtenidas a través de la solución numérica, lo cual es producto de la amortiguación que sufre el sistema.

Conclusiones y recomendaciones

En términos generales a partir de las cuatro etapas aplicadas, correspondientes con el proceso de modelado en Ciencia e Ingeniería propuesto en la figura 1, además, de las actividades y materiales didácticos implementados para cada etapa, y de las discusiones llevadas a cabo en las sesiones de clase presenciales, se logró en el ensayo con respecto a los participantes:

- iniciarlos con la formalidad en los procesos formales de la Ciencia y la Ingeniería para el estudio de fenómenos a través de métodos numéricos.
- Mostrarles cómo identificar el sistema real, además de, definir, describir y representar formalmente las variables de estado y parámetros involucrados.
- A partir del proceso relacionado con la abstracción, y a través del uso de los principios de la Mecánica Clásica, en este caso particular la formulación Newtoniana, mostrarles que la solución del modelo matemático representativo del sistema masa resorte en condiciones de amortiguamiento depende de las condiciones de valor inicial, por tratarse de una ecuación diferencial dependiente del parámetro temporal.
- Mostrar los criterios para la elección de la técnica de resolución adecuada, para el resultado analítico y numérico.
- Ensayar la construcción de las soluciones analíticas propuestas para el sistema forzado.
- Modelar numéricamente con el participante el sistema real, a partir de la construcción de algoritmos computacionales en el software Wolfram Programming Lab.
- Simular y cotejar las soluciones analíticas y numéricas relacionadas con el sistema real, con lo cual se piensa mejoraron el conocimiento y la comprensión del fenómeno o proceso.

- Presentar que simular la solución de un problema es encontrar las variables de estado en su forma numérica que aproxime en buena medida a los valores que toman dichas variables en su forma analítica; pues cada simulación está fuertemente ligada a la estimación de los valores numéricos que arroja una solución analítica para un conjunto determinado de condiciones impuesta sobre el modelo.
- Validar el modelo matemático, a través del cotejo de las soluciones analíticas y numéricas en situaciones restringidas, de las cuales se pudieron obtener resultados muy aproximados al comportamiento del sistema real.

Se recomienda la aplicación de esta propuesta para llevar a cabo el proceso de modelado para otros sistemas reales en otros cursos con contenidos de Mecánica Clásica, por ejemplo, fluidos y transferencia de calor, a través, de estudios en donde se establezca una metodología de investigación con actividades sistemáticas, un seguimiento detallado e instrumentos formales para recolectar hallazgos de posibles evidencias de desarrollo de competencias por parte de los estudiantes en los procesos de modelado en Ciencias e Ingeniería, lo cual no era pretensión de este ensayo.

También se recomienda como fase previa de una posible investigación con una metodología de investigación formal, que los participantes sean evaluados previamente para conocer su desarrollo conceptual, procedimental y operativo de las herramientas matemáticas requeridas para el modelado en Ciencia e Ingeniería, pues durante la aplicación de la propuesta, tuvieron algunas limitaciones para operar con las técnicas formales relacionadas con la obtención del modelo analítico.

Finalmente, no era pretensión de este estudio ensayo establecer conclusiones generales que puedan ser extrapoladas a cualquier otro grupo de participantes, pues para eso se amerita de un estudio más detallado como se ha mencionado, sin embargo, se propone la implementación didáctica del esquema planteado en la figura 1, con el fin de evaluar su efectividad en la potencialidad que puede aportar a los procesos de la praxis educativa en cursos de física e ingeniería, incorporando al proceso de cotejo la comparación de los resultados analíticos y la simulación con los experimentos, lo cual no se hizo en este ensayo.

REFERENCIAS

French, A. (1974). *Vibraciones y ondas*. España: Reverté.

Lázaro, M. (2015) Learning Mechanical Vibrations with Wolfram Mathematica. *Modelling in Science Education and Learning*, 8(2), 93-107.

Mosterin, J. (1978). La estructura de los conceptos científicos. *Investigación y ciencia*, 16, 82-93.

Wolfram Research. Inc. (2021) *Wolfram Programming Lab*. Versión: 12.2. Champaign: Wolfram Research, Inc. URL: <https://www.wolfram.com/programming-lab>.