

PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM: SITUAÇÕES DESENCADEADORAS DE APRENDIZAGEM PARA A EDUCAÇÃO BÁSICA

Fundamental Counting Principle: triggering learning situations for Basic Education

Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes [anemari.lopes@gmail.com]

Ana Luiza Golin [analuzagolin@gmail.com]

Thanize Bortolini Scalabrin [thanize_bortolini@gmail.com]

Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil.

Avenida Roraima, 1000 – Camobi, Santa Maria – RS, 97105-900

Recebido em: 30/09/2019

Aceito em: 13/05/2020

Resumo

Este artigo visa apresentar resultados de uma pesquisa cujo objetivo era analisar a organização do ensino voltado ao Princípio Fundamental da Contagem em três momentos da Educação Básica, mais especificamente em turmas do 4.º e do 9.º anos do Ensino Fundamental e outra do 2.º ano do Ensino Médio, em duas escolas públicas do município de Santa Maria/RS. Para contemplar esse objetivo, este trabalho baseou-se na proposta teórica e metodológica da AOE, cujos pressupostos estão ancorados na Teoria Histórico-Cultural e na Teoria da Atividade. Foram realizados estudos para compreender o movimento lógico-histórico da Análise Combinatória – em especial sobre o Princípio Fundamental da Contagem – para, então, elaborar, organizar e desenvolver Situações Desencadeadoras de Aprendizagem. A partir da sistematização dos dados obtidos durante a pesquisa, constataram-se indícios, por parte dos(as) alunos(as), da apropriação do conceito matemático trabalhado, o que leva a inferir sobre possibilidades de trabalhar com este conhecimento matemático nos três momentos de escolaridade (anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), desde que respeitadas as especificidades da turma, no que diz respeito não só ao aprofundamento matemático, mas, principalmente, ao nível de desenvolvimento dos(as) alunos(as) e ao contexto em que estão inseridos.

Palavras-chave: Ensino; Aprendizagem; Princípio fundamental da contagem; Situações desencadeadoras de aprendizagem.

Abstract

This article aims to present the results of a research whose objective was to analyze the organization of teaching focused on the Fundamental Principle of Counting in three moments of Basic Education, more specifically in classes of the 4th and 9th years of Elementary school and another of the 2nd Year of high school, in two public schools in the city of Santa Maria / RS. To contemplate this objective, this work was based on the theoretical and methodological proposal of AOE, whose assumptions are anchored in the Historical-Cultural Theory and Activity Theory. Studies were carried out to understand the logical-historical movement of Combinatory Analysis - especially on the Fundamental Principle of Counting - to then elaborate, organize and develop Triggering Learning Situations. From the systematization of the data obtained during the research, there was evidence, on the part of the students, of the appropriation of the mathematical concept worked, which leads to infer about possibilities of working with this mathematical knowledge in the three moments of schooling (initial years and final years of elementary and high school), as long the specifics of the class are respected, with regard not only to mathematical deepening, but mainly to the level of development of students and the context in which they are inserted.

Keywords: Teaching; Learning; Fundamental counting principle; Triggering learning situations.

Introdução

As reflexões sobre o ensino – entendido como a atividade principal do professor – e sobre a aprendizagem, como a atividade principal do estudante, podem ser realizadas a partir de diferentes elementos da educação escolar, dentre os quais nos deteremos na organização curricular das áreas de conhecimento e na distribuição dos seus conteúdos ao longo dos anos escolares, voltando nosso olhar à matemática. Duas justificativas podem nos ajudar a compreender essa organização. A primeira delas, relacionada aos conteúdos, é tomada de Moura (2011), que afirma que cada conteúdo presente na escola hoje o está porque, em algum momento histórico, foi considerado relevante para ser aprendido pelas gerações futuras. A segunda, concernente à distribuição desses conteúdos ao longo dos anos, vem de uma ideia muito difundida na educação escolar de que a matemática é cumulativa e que todo conteúdo precisa de um anterior, ou seja, é preciso aprender um conteúdo depois do outro, em uma sequência lógica; e, nessa perspectiva, não podemos fazer antecipações, sob o risco de não ocorrer aprendizagem.

Mesmo partindo da hipótese da veracidade das duas premissas apresentadas, como docentes e pesquisadoras na área de Educação Matemática, temo-nos perguntado: em que medida a rigidez dessas premissas pode (ou não) impactar na organização do ensino do professor e, conseqüentemente, na possível aprendizagem dos(as) estudantes, ao prescrever que não podemos ensinar determinados conteúdos, se não se referirem ao ano escolar definido pela matriz curricular? Será que sempre há necessidade de colocarmos os conteúdos em gavetas e só abrir a próxima a partir do fechamento da anterior? Será que os verdadeiros conceitos (VIGOTSKI, 2001) matemáticos são apropriados em um único e específico momento da vida escolar, ou podemos aproximá-los de nós em diferentes momentos? Ou ainda, será que o(a) estudante pode se aproximar da essência de um conceito em diferentes etapas de ensino, até dele se apropriar?

Como forma de encontrarmos possíveis respostas para nossas inquietações, decidimos voltar-nos para a Análise Combinatória, que, tradicionalmente, é um dos conteúdos que se fazem presentes no currículo escolar do Ensino Médio. E, para isso, em especial, trataremos sobre o Princípio Fundamental da Contagem (PFC), considerado um conteúdo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade e permite o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática por meio do raciocínio combinatório (BRASIL, 2002).

Compactuando com a premissa já preconizada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN (BRASIL, 1998) e, mais recentemente, pela Base Nacional Comum Curricular-BNCC (BRASIL, 2017) de que é possível, já nos anos iniciais, aproximar os(as) estudantes de conceitos relativos à Análise Combinatória, o presente artigo visa apresentar resultados de uma pesquisa cujo objetivo era analisar a organização do ensino voltado ao Princípio Fundamental da Contagem em três momentos da Educação Básica, mais especificamente: em uma turma do 4.º ano e uma do 9.º ano do Ensino Fundamental e outra do 2.º ano do Ensino Médio, em duas escolas públicas do município de Santa Maria/RS.

Inicialmente apresentaremos, de forma breve, os pressupostos teóricos e o conteúdo matemático que ampararam a pesquisa. Posteriormente trataremos as Situações Desencadeadoras de Aprendizagem, finalizando com algumas considerações sobre o estudo.

Iniciando a conversa: breves anotações teóricas

Amparados na Teoria Histórico-Cultural (THC), pautados nos estudos de Lev Semionovitch Vygotsky¹ (1896-1934), entendemos que é através da convivência no ambiente social, nas relações que estabelece, que o ser humano aprende e se desenvolve. Assim, de acordo com as ideias do

¹ Nas diversas traduções das obras desse autor, seu nome é apresentado de distintas formas, como: Vigotski, Vygotski, Vygotsky, Vygotsky, Vigotskii. No presente artigo, optamos por utilizar “Vygotsky”, ao nos referirmos à sua obra geral e, nas demais, respeitamos a forma utilizada na referência citada.

autor, pela apropriação da cultura ocorre o desenvolvimento das funções psicológicas superiores, próprias do ser humano.

As funções psicológicas superiores são socialmente formadas e culturalmente transmitidas por meio da linguagem (mais especificamente, a palavra). Portanto, um ser humano, por mais que tenha condições biológicas para se desenvolver psicologicamente e tornar-se efetivamente humano, isso não acontecerá, se não estiver inserido em uma cultura humana. Assim, ao considerarmos a matemática como um elemento cultural humano, entendemos que sua apropriação também contribui para o processo de humanização.

Ao tratar sobre o desenvolvimento de uma criança, Vygotsky (1988) faz referência ao Nível de Desenvolvimento Real, ao Nível de Desenvolvimento Potencial e à Zona de Desenvolvimento Próximo² (ZDP). O Nível de Desenvolvimento Real se refere às tarefas ou funções que a criança consegue realizar sozinha, sem a ajuda de outras pessoas, porém o autor ressalta que não se deve apenas considerar o Nível de Desenvolvimento Real da criança, ou seja, o que ela já aprendeu, mas também avaliar a criança no seu Nível de Desenvolvimento Potencial, que é quando ela desempenha tarefas mediante o auxílio de pessoas mais experientes, “[...] a área de desenvolvimento potencial permite-nos, pois, determinar os futuros passos da criança e a dinâmica do seu desenvolvimento, e examinar não só o que o desenvolvimento já produziu, mas também o que produzirá no processo de maturação” (VIGOSTKY, 1998, p. 113).

A Zona de Desenvolvimento Próximo é considerada a distância entre os níveis de Desenvolvimento Real e Potencial, ou seja, entre o que a criança já sabe fazer sozinha e aquilo que ela tem a potencialidade de vir a fazer, desde que aprenda com os outros. Nesse processo, entra o papel fundamental do professor – ou de outro sujeito mais experiente – como aquele que vai oportunizar a interação entre a criança e o mundo.

Outro conceito fundamental para dar continuidade aos estudos da THC é o de atividade, estudado por Alexei Nikolaievich Leontiev (1903-1979), que também defende a ideia de que o homem é um ser social, e entende que este se desenvolve por um sistema de atividades. E Leontiev (1988, p. 68) explica que, “por atividade, designamos os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objeto que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo”.

Assim, para uma ação constituir-se como uma atividade, seu sujeito precisa ter um motivo que o incite a realizá-la, e este motivo o mobilizará a alcançar o seu objetivo, ou seja, o motivo deve coincidir com o objeto da atividade. A atividade se materializa a partir de uma necessidade, que se objetiva no motivo que a direciona. Então, ao satisfazer uma necessidade, o ser humano transforma a natureza e se autotransforma. Nesse processo, constitui-se efetivamente humano e vai construindo e satisfazendo suas necessidades nas relações sociais.

Ao longo de sua vida o sujeito ocupa, nas relações humanas, diferentes lugares, que Leontiev (1978) define como estágios de desenvolvimento – infância pré-escolar; período escolar; e adolescência –, os quais se alteram conforme a atividade principal do sujeito. O primeiro estágio refere-se à fase em que a criança está descobrindo o mundo a sua volta, e suas relações restringem-se aos seus pais, aos familiares e às crianças que a rodeiam, e, aqui, sua atividade principal é o jogo. Ao entrar na escola, a criança passa a ter um compromisso com a sociedade e não mais somente com a família, e o conteúdo de sua atividade é o estudo. O terceiro estágio é a adolescência, em que a atividade dominante é o trabalho, quando se intensifica a inserção no mundo para além das relações escolares. Em relação a este último, Leontiev (1978, p. 291), diz que: “[...] do ponto de vista da consciência, esta passagem à última idade escolar é marcada pelo desenvolvimento de uma

² Há várias outras traduções, que chamam de Zona de Desenvolvimento Proximal ou Iminente, mas neste trabalho optamos por utilizar o termo “Zona de Desenvolvimento Próximo”.

atitude crítica face às exigências às maneiras de agir, às qualidades pessoais dos adultos e pelo aparecimento de interesses novos pela primeira vez verdadeiramente teóricos”.

Esses três estágios vão ocorrendo em determinado tempo, e o que define a passagem de um para outro são as condições históricas e não, necessariamente, a idade da criança. Nesse sentido, ainda ao pensar na perspectiva de Leontiev (1988), há de se levar em consideração que o desenvolvimento das funções psíquicas superiores do sujeito ocorre, em especial, por meio de sua atividade dominante, o que deve ser levado em consideração pelo professor ao organizar o seu ensino.

Com base nos princípios da THC, Moura (1996, 2001) propõe a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) e a define como

[...] aquela que se estrutura de modo a permitir que sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. É atividade orientadora porque define elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor. Este estabelece os objetivos, define as ações e elege os instrumentos auxiliares de ensino, porém não detém todo o processo, justamente porque aceita que os sujeitos em interação partilhem significados que se modificam diante do objeto de conhecimento em discussão. (MOURA, 2001, p. 155)

A AOE é considerada *orientadora* porque orienta a ação do professor na organização do ensino, permitindo-lhe sistematizar os conteúdos para serem trabalhados no coletivo, visando, assim, à aprendizagem por meio da apropriação dos conceitos matemáticos, aspectos estes que explicitam a sua dupla dimensão formadora. Ela coloca como necessidade a organização do ensino por parte do professor e a aprendizagem pelo(a) aluno(a), como destaca Moura (2001, p. 155):

A Atividade Orientadora de Ensino tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; elege instrumentos auxiliares de ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco, etc.) E por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende.

Sob esta perspectiva, o ensino será intencionalmente organizado pelo professor a partir da compreensão de que a escola é o lugar privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente, sendo direito de todos(as) a sua aprendizagem.

Como encaminhamento metodológico – visando à organização e à aprendizagem dos conceitos matemáticos – destacam-se os elementos: a *Síntese Histórica do Conceito*, a *Situação Desencadeadora de Aprendizagem (SDA)*, a *Síntese da Solução Coletiva* e a *Avaliação*.

Cabe ressaltar que entendemos que todo conceito matemático foi construído historicamente, seguindo um determinado movimento lógico, partindo de uma necessidade humana. Assim, o primeiro elemento, a *Síntese Histórica do Conceito*, demanda estudos, pelo professor, do movimento lógico-histórico do conceito a ser desenvolvido com os(as) alunos(as), visando à compreensão da sua gênese. A partir desse conhecimento, o professor poderá criar uma *Situação Desencadeadora de Aprendizagem* que contenha um problema a ser resolvido, elaborado de modo a gerar a necessidade de resolvê-lo, coerente com o seu movimento de criação.

A SDA pode ser apresentada de diversos modos: como uma história virtual, na forma de jogos ou pode ser uma situação emergente do cotidiano. O que determinará a forma de apresentar a SDA são os(as) alunos(as) com os quais se está trabalhando que, a partir dela, buscarão coletivamente uma síntese.

Na AOE, a solução da situação-problema pelos estudantes deve ser realizada na coletividade. Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exigem o compartilhamento das ações para a resolução de uma determinada situação que surge em certo contexto. Garantir que a atividade de estudo dos educandos vai se dar prioritariamente dentro de um coletivo busca concretizar o princípio ou a lei de formação das funções psíquicas superiores, elaborada pela teoria histórico-cultural[...]. (MOURA et al., 2010, p.106)

Esse terceiro elemento - *Síntese da Solução Coletiva* - remete ao modo como os(as) alunos(as) deverão encontrar a solução da SDA a partir da mediação do professor, de modo que seja construída coletivamente a partir da interação e das sugestões propostas durante a discussão do problema. Para que eles(as) se sintam motivados(as) a resolver a SDA, esta deve contemplar uma necessidade para a busca da solução.

Consideremos, ainda, a *Avaliação* como outro elemento muito importante da AOE, pois através dela o professor poderá refletir sobre sua prática, a fim de melhorá-la cada vez mais, a partir dos aspectos positivos e negativos do seu trabalho. Além disso, ao colocar os(as) estudantes para compartilharem suas hipóteses durante o momento da Síntese da Solução Coletiva, estará sendo oportunizado que sejam protagonistas do seu processo de construção de conhecimento.

Com base nesse contexto teórico organizamos as ações apresentadas neste artigo, pautados na compreensão de que a AOE permite ao professor organizar o ensino; realizar a avaliação da sua prática no processo de educação escolar; e apropriar-se de novos conhecimentos teóricos, sempre voltado para os(as) estudantes, que, por sua vez, desenvolverão sua atividade de aprendizagem.

Apresentados os fundamentos teóricos orientadores de nossas ações, tratemos do conteúdo nelas envolvido. Também conhecido como princípio da multiplicação, o Princípio Fundamental da Contagem é um elemento fundamental da Análise Combinatória que nos permite resolver a grande maioria dos problemas a ela relacionados, principalmente os relativos à contagem. Pode, portanto, ser considerado como um dos princípios mais poderosos e eficazes na resolução desses problemas. Segundo Morgado et al. (2016, p. 16), esse é “[...] o Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio da Multiplicação, o qual diz: Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é xy ”.

Trazemos também a definição de Dante (2005, p. 284):

Se um evento é composto por duas etapas sucessivas e independentes de tal maneira que o número de possibilidades na primeira etapa é m e para cada possibilidade da primeira etapa o número de possibilidades na segunda etapa é n , então o número total de possibilidades de o evento ocorrer é dado pelo produto mn .

Essas definições apontam para sua eficiência na Análise Combinatória, tal como a conhecemos hoje, mas é importante lembrar que as primeiras atividades matemáticas realizadas no decorrer da história humana estavam relacionadas à contagem de elementos de um conjunto, enumerando seus elementos.

A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é *contar*, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (MORGADO et al., 2016, p. 15)

Essa técnica aprendida pela criança – contar ou enumerar os elementos de um conjunto para descobrir a quantidade total – está associada à operação de adição, que é sempre incorporada em conexão com um problema de contagem. Os PCN dos anos iniciais do Ensino Fundamental, documento que precedeu a BNCC, destacam que é importante que o(a) aluno(a) tenha o contato

com o conteúdo desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, pois o objetivo do problema de contagem é “lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades” (BRASIL, 1998, p. 52). Esse documento explicita, ainda, que

a resolução de problemas de contagem, no ensino fundamental, coloca o aluno diante de situações em que é necessário agrupar objetos, em diferentes quantidades, caracterizando os agrupamentos feitos. Ao tentar solucionar essas situações, ele poderá aperfeiçoar a maneira de contar os agrupamentos e desenvolver, assim, o raciocínio combinatório. (BRASIL, 1998, p. 136-137)

Mais recentemente, a Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017) também se refere a trabalhar com o PFC nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No quarto ano, na parte de *Números: Problemas de contagem*, quanto às habilidades a serem desenvolvidas, orienta sobre a combinação de elementos para determinar o número de agrupamentos possíveis. Já para o quinto ano, sugere resolver e elaborar problemas simples de contagem, que envolvam o princípio multiplicativo, que podem ser também resolvidos por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Nesse documento, para os anos finais do Ensino Fundamental, somente encontramos o PFC no oitavo ano, na parte de *Números: O princípio multiplicativo da contagem*, que propõe resolver e elaborar problemas de contagem, de modo que a resolução envolva os princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias como o diagrama de árvore. Já no Ensino Médio, em *Probabilidade e Estatística*, as habilidades incluem resolver e elaborar problemas de contagem que incluam agrupamentos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo e da utilização do diagrama de árvore.

Destacamos, então, que a Análise Combinatória abrange vários tipos de problemas, além de combinações e de várias outras técnicas, sendo o PFC um dos elementos mais importantes, por ser considerado a base para o desenvolvimento dos demais, e, portanto, relevante para a aprendizagem matemática. Assim, tomando-o como uma ferramenta básica, desenvolvemos nossa investigação programando ações com o intuito de analisar a organização do ensino voltado ao Princípio Fundamental da Contagem em três momentos da Educação Básica.

O Princípio Fundamental da Contagem: situações desencadeadoras de aprendizagem

A pesquisa envolveu as seguintes etapas: estudo do movimento lógico-histórico da Análise Combinatória, mais especificamente sobre o PFC; organização de SDA; desenvolvimento das ações em duas escolas da rede pública do município de Santa Maria-RS; análise dos dados. Tendo em vista que a investigação aqui apresentada fazia parte de um projeto mais amplo, relacionado à Educação Matemática no contexto escolar, a opção centrou-se nas escolas públicas parceiras nesse projeto. As SDA foram desenvolvidas no horário das aulas de matemática, em parceria com as professoras regentes, em três turmas: 4.º ano do Ensino Fundamental, composta por 24 alunos(as); 9.º ano do Ensino Fundamental, composta por 27 alunos(as); e 2.º ano do Ensino Médio, com 18 alunos(as).

Embora a aplicação direta do PFC possa se tornar por vezes trabalhosa em alguns problemas e levar ao uso de outros modos de formar agrupamentos, seu conhecimento implica na apropriação de um instrumento básico e valioso para a Análise Combinatória. Assim, partindo da ideia de que “se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1 , há y modos de tomar a decisão D_2 , então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy ” (LIMA et al., 2006, p.89), colocamos o desafio de pensar numa organização do ensino que permitisse aos(as) estudantes essa compreensão, para além da simples memorização da definição.

Coerentemente com o movimento lógico-histórico do PFC, foram elaboradas três SDA, tendo por objetivo colocar os(as) alunos(as) em uma situação que exigisse organizar um modo geral de combinar diferentes elementos para determinar uma quantidade dessas possibilidades. Além disso, foram levadas em consideração as especificidades de cada turma e estágio de desenvolvimento correspondente, conforme apresentaremos a seguir.

a) O Gato do País das Maravilhas e as possibilidades no 4.º ano do Ensino Fundamental

Atentando para o fato de que a turma do 4.º ano estava trabalhando com o tema “Alice no País das Maravilhas” e para as especificidades da turma estar em estágio de desenvolvimento em que o lúdico se faz muito presente, organizamos uma SDA por meio de uma história virtual, apresentada em forma de vídeo, em que Alice (personagem da história, representada por uma das participantes do projeto) se dirigia a esses(as) estudantes e lhes solicitava auxílio para resolver um problema, conforme enredo do Quadro 1.

Quadro 1 – Síntese do Enredo da História Virtual

Oi pessoal, vocês sabiam que eu gosto muito de pintar quadros? Pois bem, preciso pintar alguns quadros do meu amigo Gato. Para isso, ele vai ser meu “modelo vivo”, e como ele tem a habilidade de mudar de cor, ficando com duas cores, uma em seu corpo e outra no rabo, comprei seis cores de tinta, sendo elas: rosa, laranja, vermelho, azul, marrom e amarelo. O Gato vai me ajudar a combiná-las, trocando de cores, conforme as que comprei. Vocês podem me ajudar a saber quantos quadros diferentes conseguirei pintar, lembrando que ele consegue trocar duas cores diferentes por vez?

Fonte: Dados do projeto

O vídeo deixou a turma bastante motivada para ajudar Alice. Alguns tinham anotado as cores elencadas por Alice, outros perguntavam sobre elas e logo tentavam encontrar uma resposta. Durante as discussões, Vagner³ e Marinara apontaram dois dados importantes: as seis cores de tinta e a habilidade que o Gato tinha de mudar de cor, combinando duas por vez – uma em seu corpo e outra no rabo. Isso levou os(as) estudantes a, inicialmente, concluírem que o Gato não poderia ser totalmente pintado da mesma cor e que uma mesma cor poderia ser usada duas vezes, uma vez no corpo e outra vez no rabo.

Essas manifestações coincidem com aspectos importantes do conceito de arranjo simples, em que, segundo Dante (2005), dois agrupamentos diferem entre si, se tiverem elementos diferentes ou, ainda, se todos elementos dos agrupamentos estiverem em ordens diferentes. Assim, os quadros poderiam ser pintados, por exemplo, tanto com tinta marrom no rabo e verde no corpo, quanto marrom no corpo e verde no rabo, pois os mesmos elementos estariam em ordens diferentes.

Embora Vagner e Marinara já parecessem ter compreendido o problema, inicialmente apresentaram ideias gerais de como ajudar a personagem Alice, com a quantidade de quadros que poderiam ser pintados: citaram diversas quantidades, apegando-se ao número inicial de seis cores em grupo de duas (chegando ao resultado três), o que nos indicou que era o momento de discutir sobre um modo organizado de encontrar a solução.

Então, levando em consideração a importância, para estudantes dos anos iniciais, de utilizar instrumentos auxiliares e de manipulação, prendemos no quadro da sala de aula um cartaz com o desenho do Gato em papel pardo, bem como disponibilizamos, confeccionadas em papel dobradura, as partes do corpo e do rabo nas seis cores diferentes, para que a turma, em conjunto, fosse manipulando e realizando as combinações.

³ Atendendo às normas do Comitê de Ética da instituição, durante o trabalho foram utilizados nomes fictícios para os(as) alunos(as), predefinidos pelas autoras, a fim de preservar suas identidades.

A intenção era de que encontrassem uma solução coletiva para o problema, pois entendemos que a apropriação do conhecimento, no caso, matemático, ocorre por meio da interação com os sujeitos. Em relação a isso, lembramo-nos de Moura, quando afirma que “[...] a solução da situação-problema pelos estudantes deve ser realizada na coletividade. Isso se dá quando aos indivíduos são proporcionadas situações que exigem compartilhamento das ações para a resolução de uma determinada situação que surge em certo contexto” (MOURA, 2016, p. 122).

Solicitamos a Marinara manipular o material e verificar se a sugestão de três quadros (hipótese inicial) estava certa. Ela começou a fazer as combinações e, quando já havia organizado três possibilidades de quadros diferentes, verificou que ainda estavam sobrando cores de rabo e corpo e ficou com dúvidas em relação a essa sugestão. Então, Vagner, Júlia e Carlos se dispuseram a ajudar a colega, conseguindo combinar mais alguns quadros diferentes, conforme podemos observar na Figura 1.



Figura 1 – Organização das hipóteses de combinação das cores do Gato
Fonte: Dados do projeto

A partir da mediação do grupo pelo professor da turma e com a manipulação do material, eles(as) foram observando que surgiam mais combinações diferentes de quadros, indo além de três – suposição inicial. Como não estavam entrando em acordo para chegar a uma Síntese da Solução Coletiva, iniciamos, em conjunto, a construção da árvore das possibilidades, uma vez que, no Princípio Fundamental da Contagem, uma forma de visualizarmos os pares ordenados é através de um diagrama “conhecido como diagrama sequencial ou diagrama de árvore” (HAZZAN, 2013, p.2). Contudo, levando em consideração a especificidade da turma em que estávamos, nós o fizemos, apoiando-nos na manipulação das combinações no Gato, para que visualizassem o que já havia sido realizado e não repetissem combinações.

O que nos interessava era que eles(as) se apropriassem de um modo geral de resolver o problema, e não apenas descobrissem o resultado numérico. Segundo Rubtsov (1996, p.131), o modo geral ou forma de ação geral “designa aquilo que é obtido como resultado ou modo de funcionamento essencial para trazer soluções para os problemas de aprendizagem; mais do que soluções, e este resultado particular o objeto desses problemas”.

Dessa maneira, retomamos a manipulação do material, conseguindo combinar as diferentes cores sem repeti-las. Para a construção da árvore das possibilidades foram confeccionados quadrados de papel nas seis diferentes cores, para representar o corpo do Gato, e círculos de papel com essas seis cores diferentes, representando o rabo. O primeiro encaminhamento – sugerido pela turma – foi fixar o corpo marrom e variar as cores do rabo, visto que já tinham o conhecimento de que, para o corpo marrom, seriam necessárias cinco cores de rabo. Pintaram cinco quadros

diferentes, e concluíram que poderiam adotar o mesmo procedimento com as outras cores de corpo. Seguimos com a manipulação do material (comparando com o quadro do Gato) e a construção da árvore das possibilidades, solicitando a participação de todos(as) os (as) estudantes. Maria e Cássio, que ainda não tinham participado, escolheram a cor do corpo – laranja – e foram trocando as cores do rabo. Quando terminaram, imediatamente chegaram à conclusão de que, neste caso, seriam dez quadros.

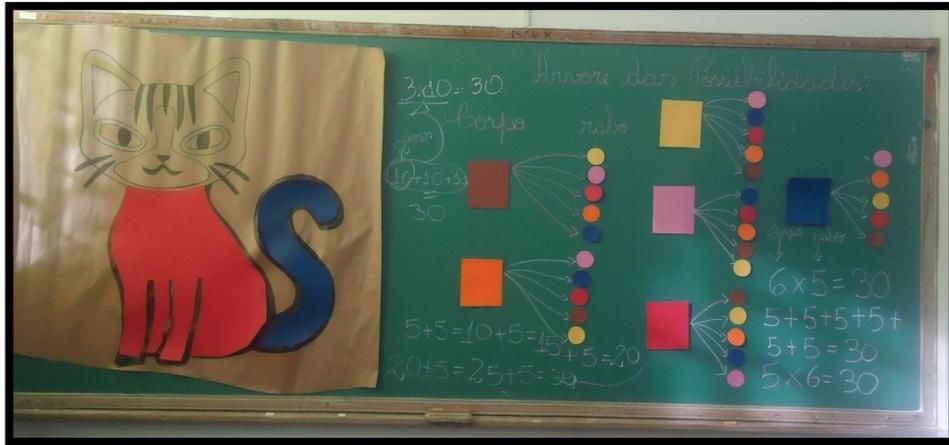


Figura 2 – Organização coletiva da árvore de possibilidades de combinação das cores do Gato
Fonte: Dados do projeto

Ao questionarmos se Alice conseguiria pintar 10 quadros ou mais, Cassio prontamente respondeu que seriam 30 quadros. Explicou que poderia fazer 6 vezes 5, pois o Gato podia combinar 6 cores do corpo com 5 cores de cada vez no seu rabo.

Na expectativa de que todos(as) compreendessem a solução apontada, solicitamos que outras duplas fossem ao quadro, até concluírem a árvore e, ao final, os(as) alunos(as) concordarem coletivamente com a solução apresentada por Cassio. Ou seja, constataram que seria possível pintar 30 quadros diferentes e facilmente identificaram que conseguiriam esse resultado multiplicando as 6 diferentes cores do seu corpo com as outras 5 combinações de cores em seu rabo.

Posteriormente, foi entregue uma folha para o registro individual da construção da árvore das possibilidades e, para finalizar, outro registro que continha vários desenhos de Gatos para que fossem feitas as combinações por meio de pintura (Figura 3). Entendemos, assim como apontam Nacarato, Mengali e Passos (2009), que o registro é uma forma de verificar a compreensão dos conceitos matemáticos estudados, colaborando no processo de educação escolar.

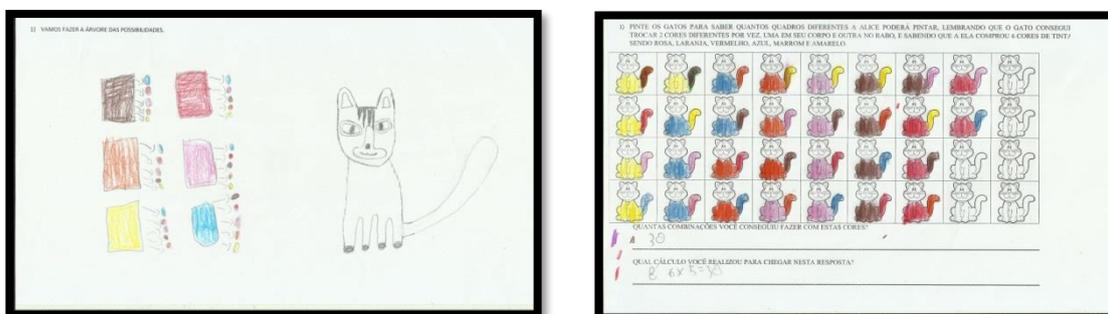


Figura 3 – Registro individual de um(a) dos(as) alunos(as) da árvore e das possibilidades
Fonte: Dados do projeto

Ao observarmos estes registros, percebemos que somente uma criança iniciou a pintura do Gato tentando variar as cores do rabo e do corpo aleatoriamente, mas acabou se confundindo e pintando vários Gatos iguais. Todos(as) os(as) demais seguiram uma ordem, pintando uma cor fixa

para o corpo e variando as cores do rabo. Ressaltamos que essa organização da pintura das combinações partiu de cada aluno(a), o que nos leva a entender que buscaram um modo geral de resolver o problema, diferentemente da aluna que pintou aleatoriamente. Por conseguinte, podemos afirmar que tanto estes registros quanto a participação oral dos(as) alunos(as) apontam indícios de que as ações desenvolvidas lhes possibilitaram a aprendizagem do conceito de multiplicação, relacionada ao PFC.

Lembramos novamente Rubtsov (1996, p. 33), que afirma que

a aquisição da forma de ação geral constitui um aspecto muito importante da resolução de um problema de aprendizagem. Essa resolução pede que um dado modelo de ação seja transformado em uma base, que constitui a orientação comum para completar as ações concretas relativas a uma classe de problemas; procedimento que resulta na transformação do aluno em si, através de uma autotransformação, uma vez que ele modifica, então, os modos de funcionamento e de regulação das suas próprias ações e adquire novos modos de orientação das suas ações no interior do sistema de situações que o cerca.

O recurso utilizado – cartaz e partes do Gato – foi de muita relevância para que chegassem à Síntese da Solução Coletiva da SDA. Cabe inferir, contudo, que o uso de materiais manipulativos exige organização por parte do professor. A esse respeito, Passos (2006, p. 78) destaca:

Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização do processo de ensino e aprendizagem. Entretanto, considero que esses materiais devem servir como mediadores para facilitar a relação professor/aluno/conhecimento no momento em que um saber está sendo construído.

No nosso caso entendemos que a manipulação, embora se caracterize como uma experiência meramente empírica, em se tratando do nível de desenvolvimento dos(as) alunos(as) desta turma, pode ser considerada como um passo importante rumo a futuras generalizações.

b) Discutindo possibilidades no 9.º ano do Ensino Fundamental

Para o 9.º ano do Ensino Fundamental, embora a intenção inicial fosse propor somente uma SDA, tendo em vista o desenvolvimento inicial, julgamos importante realizar uma segunda. A primeira, em especial, levava em consideração o contexto dos(as) alunos(as): frequentavam uma escola que só tinha Ensino Fundamental, o que os levava a procurar outra escola para o Ensino Médio; e a maioria tinha a expectativa de frequentar o Ensino Técnico, como modo de inserir-se no mercado de trabalho.

A primeira SDA foi apresentada por meio de um vídeo intitulado *Descobrimo o número de possibilidades para frequentar uma escola técnica em Santa Maria*, organizado especificamente para isso e cuja síntese se encontra no Quadro 2.

Quadro 2 - Enredo da primeira SDA

Descobrimo o número de possibilidades para frequentar uma escola técnica em Santa Maria

Hoje em dia são muitos os(as) alunos(as) que estudam em escolas públicas em que só é ofertado o Ensino Fundamental. Assim, ao concluírem o 9.º ano, devem optar por outra escola para seguir seus estudos e concluir o Ensino Médio. Nesta perspectiva, muitos(as) optam por escolher uma escola que possua cursos técnicos integrados ao Ensino Médio, já saindo, assim, preparados(as) para o mercado de trabalho. Imaginem agora se vocês, que estão no 9.º ano, desejassem optar por um Ensino Médio Técnico, mas ainda estivessem muito indecisos na sua escolha. Em Santa Maria, vocês terão a opção de ingressar em duas Escolas Técnicas, sendo elas a Escola Estadual de Ensino Médio Professora Maria Rocha e o Colégio Politécnico da UFSM, que oferecem os cursos: Informática, Secretariado e Contabilidade. Além disso, cada curso é oferecido nos três turnos:

manhã, tarde ou noite. Como são várias as opções, é interessante verificar todas as possibilidades para que vocês possam organizar o tempo e planejar as suas tarefas diárias. **As possibilidades são várias. Como podem fazer para saber quantas opções de escolha vocês terão em relação à escola, ao curso e ao turno, lembrando que terão a opção de ingressar em uma das duas Escolas Técnicas, escolhendo apenas um entre três cursos e um dos três turnos?**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Após o término do vídeo, iniciou-se a discussão coletiva da busca pela solução do problema. Rafael respondeu que eram 12 possibilidades, argumentando que havia realizado um cálculo mental. Guilherme respondeu que eram 8 possibilidades, justificando que, para encontrar esse resultado, ele somou os elementos que constituíam o problema, ou seja, as 2 escolas, mais os 3 cursos e mais os 3 turnos. Carolina respondeu que eram 18 opções, explicando-nos que eram 3 cursos, 3 turnos e 2 escolas e que, somando essas possibilidades, ela tinha encontrado 9 e, então, bastava multiplicar por 2 que se chegava ao resultado.

Dada a diversidade das respostas, optamos por partir da explicação de Carolina sobre seu modo geral de resolver – multiplicando os elementos – e construir a árvore das possibilidades. Como não conheciam esse procedimento (o que já era esperado), nós o fizemos no quadro, em conjunto com a turma, tendo em vista que se tratava de alunos(as) num nível de desenvolvimento que, normalmente, não necessita de apoio de instrumentos sensoriais (como nos anos iniciais). Assim, resgatando todas as discussões e questionando qual era a forma mais rápida de resolver o problema, a turma toda concordou rapidamente que era fazendo a multiplicação das opções de escola, turnos e cursos, ou seja, aceitaram e compreenderam a sugestão inicial da colega.

Para sistematizar a Síntese da Solução Coletiva do problema resolvido pela turma, foi realizado um registro individual que solicitava que explicassem a solução encontrada.

Posteriormente dividimos a turma em grupos, entregamos outras situações-problema e solicitamos que as representassem. A partir da análise dos registros individuais e coletivos, foi possível observar indícios da apropriação do conceito matemático trabalhado, uma vez que todos(as) os(as) alunos(as) mencionaram que a solução foi a multiplicação, e a explicaram. Entendemos que o processo de discussão com toda a turma foi importante, pois, como defende Rubtsov (1996), a aptidão para a aprendizagem é fruto de uma determinada interiorização, originada essencialmente de situações de atividade coletiva (Figura 4).

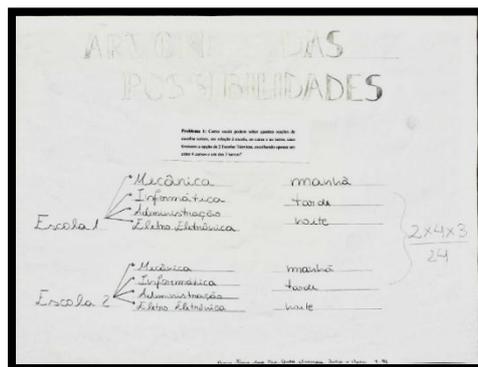


Figura 4 – Registro individual de um(a) dos(as) alunos(as) da árvore de possibilidades

Fonte: Dados do projeto

Salientamos que a SDA apresentada para o 9.º ano envolvia o mesmo conceito da apresentada ao 4.º ano, e os(as) alunos(as) chegaram a soluções semelhantes. A diferença esteve no enredo da SDA, no material utilizado e no modo de encaminhamento.

A partir do envolvimento da turma e da demonstração de indícios de sua aprendizagem, consideramos pertinente dar continuidade e trabalhar com o conceito de arranjo como uma consequência do PFC, mas sem mencioná-lo; e elaboramos uma segunda SDA apresentada em forma de texto e sintetizada no Quadro 3.

Quadro 3 – Apresentação da segunda SDA

Resolvendo o problema do fabricante de tapetes

O tapete é muito utilizado nas portas das casas e no seu interior, tanto para embelezar o ambiente, quanto para secar ou limpar os pés. Eles podem ser feitos de sisal, plástico, entre outros materiais. As pessoas estão cada vez mais exigentes e gostam muito de comprar tapetes coloridos. Vamos supor que você fosse o fabricante dos tapetes e, sabendo que os clientes adoram coisas coloridas, teve a ideia de fabricar alguns para aumentar as suas vendas. Desse modo, o tapete será confeccionado com duas cores, sendo uma cor na sua base e a outra na sua estampa estrelada, que podem ser variadas: preto, marrom, verde, azul e laranja. Porém, você precisa saber quantos tapetes diferentes serão confeccionados para poder controlar as suas vendas. **De que forma você pode saber quantos tapetes diferentes serão confeccionados, lembrando que o tapete terá uma base e uma estampa estrelada que podem ser variadas entre essas cinco cores: preto, marrom, verde, azul e laranja?**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Após a apresentação da SDA, foi feita uma representação do tapete no quadro, para iniciarmos as discussões, e Carolina logo respondeu que eram 10 tapetes, e havia encontrado esse resultado, fazendo o cálculo no caderno pela árvore das possibilidades. Contudo, sua resposta indicava que não havia levado em consideração que a base e a estampa do tapete poderiam ter as cores inversas (por exemplo: a base marrom e a estampa preta ou a base preta e a estampa marrom). Posteriormente, surgiram outras hipóteses, como a de Guilherme, que encontrou 80 tapetes e justificou ter feito o cálculo mentalmente; e a de Mauricio, que encontrou 20 tapetes, justificando que, como o tapete tinha a base e a estampa – que eram 2 elementos – ele havia multiplicado pelas 5 cores.

Enquanto alguns(mas) se manifestavam com suas sugestões, os(as) outros(as) alunos(as) também tentavam resolver em seus cadernos, e suas hipóteses também eram escritas no quadro, para mais tarde verificarmos qual delas contemplava a solução do problema. Como cada um encontrava uma forma diferente de resolver e resultados diferentes, sugerimos a construção da árvore das possibilidades em conjunto no quadro – procedimento já utilizado na SDA anterior. Os(As) alunos(as) optaram por fixar a base do tapete com a cor preta e variar as outras cores na estampa, seguindo para outras cores fixas.

Nessa segunda SDA a intenção foi trabalhar o Princípio Fundamental da Contagem e o arranjo simples, mas o termo “arranjo simples” não foi mencionado. Lembrando que o arranjo é uma consequência do PFC, optamos por discutir o problema apenas a partir do PFC, uma vez que a sua formalização só é abordada no Ensino Médio, e não era nosso interesse fazê-lo nesse momento. O objetivo era de que os(as) alunos(as) percebessem a possibilidade de resolver os dois problemas utilizando o mesmo princípio, o que, normalmente não é feito, e o professor opta por apresentar as fórmulas e solicitar sua aplicação o que, por vezes, determina apenas uma forma automatizada, derivada somente da sua memorização.

Posteriormente, cada estudante recebeu uma folha para a realização do registro no qual deveriam indicar a quantidade dos tapetes, pintando os desenhos (Figura 5).

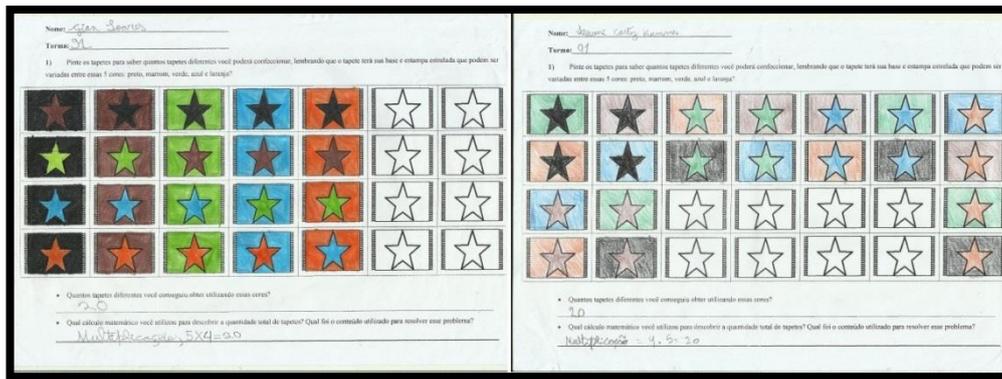


Figura 5 – Registro individual de um(a) dos(as) alunos(as) das combinações possíveis
Fonte: Dados do projeto

Entregamos, também, para registrar a construção da árvore das possibilidades, outra folha contendo figuras de estrelas para representar a estampa do tapete e figuras em forma de quadrado para representar a base do tapete, a fim de montarem os tapetes por meio de colagem (Figura 6).

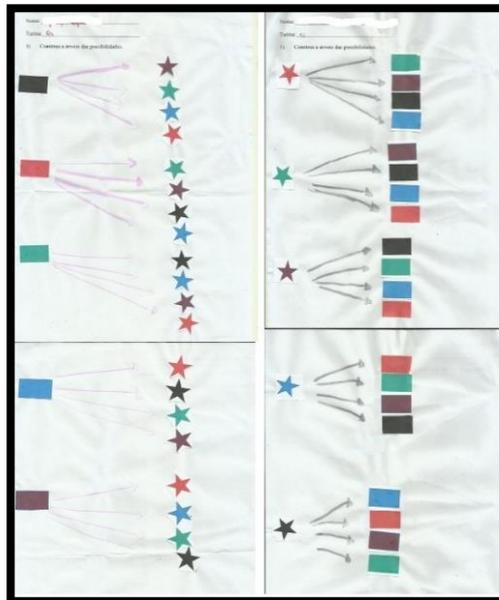


Figura 6 – Registro individual, de um(a) dos(as) alunos(as), da árvore de possibilidades
Fonte: Dados do projeto

Os registros mostraram que todos(as) conseguiram resolver a situação e indicaram a possibilidade que tinham aprendido. Observando o envolvimento e o desempenho dos(as) alunos(as) nesta etapa, podemos destacar que nesta SDA, que tinha um grau maior de dificuldade que a anterior, o material de apoio utilizado – por meio de desenho e colagem – foi importante para que conseguissem organizar as possibilidades.

b) Enfrentando desafios e possibilidades no 2.º ano do Ensino Médio

Para trabalhar o PFC no 2.º ano do Ensino Médio, organizamos duas SDA, envolvendo os conceitos de arranjo simples e combinação simples. Esse trabalho foi desenvolvido em uma escola que possui Ensino Médio regular e somente uma parte muito pequena dos(as) estudantes opta por cursar o Ensino Superior. A maior parte acaba fazendo cursos sequenciais ou técnicos.

A primeira SDA foi apresentada para os(as) alunos(as) por meio de um vídeo que trazia o enredo apresentado no Quadro 4.

Quadro 4 - Enredo da primeira SDA**Enfrentando um desafio na profissão**

Atualmente, existem inúmeras profissões no mercado de trabalho e, conseqüentemente, cursos profissionalizantes e de graduação, como, por exemplo, engenharia, licenciatura, cursos técnicos, entre muitos outros. A grande maioria dos(as) alunos(as) que acabam o Ensino Médio ficam em dúvidas sobre qual profissão seguir e continuar seus estudos. Entre diversas possibilidades existe um curso chamado “Técnico em Móveis”. Suponhamos que você tenha escolhido cursá-lo e, logo após o seu término, tenha montado uma empresa no ramo moveleiro, especializando-se na fabricação de cadeiras. Você tem alguns materiais disponíveis em sua loja para a fabricação delas: quatro opções de cores (preto, marrom, verde e bege); três opções de revestimento (couro, tecido e corino) e cinco opções de estrutura (MDF, madeira, ferro, aço e plástico). Porém, como iniciante nesse ramo, precisa saber quantos tipos de cadeiras diferentes poderá fabricar para colocar à venda no mercado. **De que forma você pode descobrir a quantidade de cadeiras que poderão ser fabricadas para colocar à venda, lembrando que possui os seguintes materiais: quatro opções de cores para o revestimento (preto, marrom, verde e bege); três opções de revestimento (couro, tecido e corino); cinco opções de estrutura (MDF, madeira, ferro, aço e plástico)?**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Após o término do vídeo, foi iniciada a discussão, e Cassiano logo perguntou se era para encontrar a quantidade de cadeiras. Salientamos que queríamos encontrar uma forma de descobrir essa quantidade de cadeiras e, conseqüentemente, o resultado. Consideramos, assim como já esclarecido anteriormente, que a apropriação do conhecimento matemático não se dá, necessariamente, no encontro de uma solução numérica de um problema prático, mas sim, num modo geral de resolvê-lo (RUBTSOV, 1996) que não seja específico desse problema, mas aplicável a todos que envolvem esse conceito.

Marcelo, então, manifestou-se, dizendo que a solução seria obtida multiplicando os números ou dividindo-os. Alguns(mas) alunos(as) ficaram espantados(as) quando ele mencionou dividir, rejeitando essa possibilidade e, por conseguinte, ele afirmou o resultado, dizendo que eram 60 cadeiras. Como pretendíamos suscitar uma discussão coletiva para encontrar a solução, fomos instigando a apresentação de outras soluções, e João afirmou que eram 345, justificando que tinha somado os elementos do problema, chegando a esse resultado. Logo outras respostas surgiram e foram anotadas no quadro, porém não houve consenso sobre qual consideravam a correta, o que nos levou a propor a construção da árvore das possibilidades. Embora não possuíssem conhecimento e nunca houvessem utilizado esse procedimento (pois ainda não haviam estudado esse conteúdo), assim como procedemos no 9.º ano, decidimos por fazê-lo exclusivamente no quadro da sala de aula, com a participação de todos(as), partindo do pressuposto de que não precisariam de auxílio de nenhum material. No decorrer da construção isso foi comprovado, uma vez que percebemos que todos compreenderam bem os encaminhamentos e nem foi preciso concluí-lo. Ou seja, como resultava em muitas opções, foram construídas apenas as possibilidades na opção da cor verde, com as opções de estruturas e revestimento, e todos(as) já concordaram com a solução: para encontrar a forma de descobrir a quantidade de cadeiras que poderiam ser fabricadas, bastava multiplicar os números de cores, revestimento e estrutura, o que resultaria na quantidade de cadeiras – neste caso, 60 opções.

Foi solicitado, então, que se dividissem em grupos e fizessem o registro em cartazes, o que foi feito por todos(as) sem dificuldades.

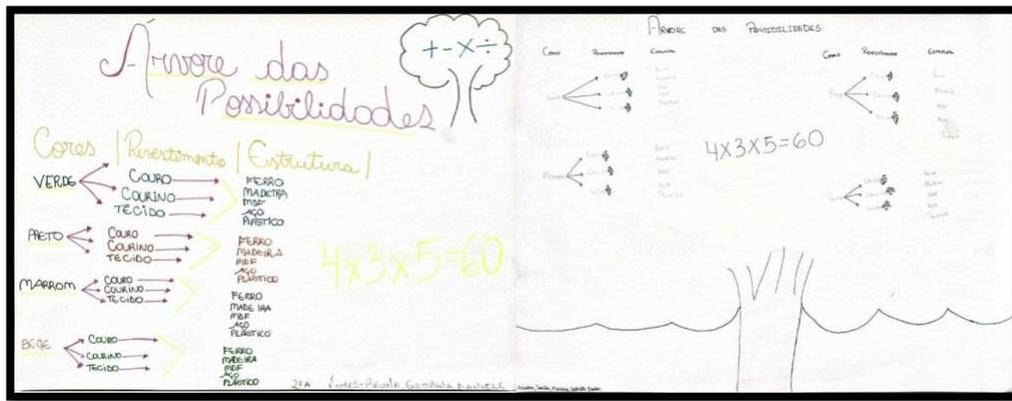


Figura 7 – Registro de um dos grupos da árvore de possibilidades
 Fonte: Dados do projeto

Em seguida, foi entregue para cada aluno(a) a folha de registro da Síntese da Solução Coletiva, para sistematizar, individualmente, a resolução da Síntese da Solução Coletiva da turma, a partir de sua própria compreensão. Baseados na análise desses registros, pudemos verificar que os(as) alunos(as) compreenderam o que haviam expresso verbalmente, que foi resolvido através da multiplicação, apropriando-se, assim, do conceito matemático. Cada um(a) recebeu, ainda, uma folha para representar em um quadro todas as opções de cadeiras, procedimento semelhante ao utilizado no 9.º ano, mas, ao invés de desenhos e colagens, deveriam preencher com palavras (Figura 8).

Nome: _____
 Turma: 22A

• Representa a solução do problema, escrevendo todas as opções de cadeiras que poderão ser fabricadas através do modelo do quadro abaixo.

Cor	Revestimento	Estrutura
Marron	Tecido	MDF
Marron	Tecido	Madeira
Marron	Tecido	Ferro
Marron	Tecido	Aço
Marron	Tecido	Plástico
Marron	Couro	MDF
Marron	Couro	Madeira
Marron	Couro	Ferro
Marron	Couro	Aço
Marron	Couro	Plástico
Marron	Couro	MDF
Marron	Couro	Madeira
Marron	Couro	Ferro
Marron	Couro	Aço
Marron	Couro	Plástico
Preto	Tecido	MDF
Preto	Tecido	Madeira
Preto	Tecido	Ferro
Preto	Tecido	Aço
Preto	Tecido	Plástico
Preto	Couro	MDF
Preto	Couro	Madeira
Preto	Couro	Ferro
Preto	Couro	Aço
Preto	Couro	Plástico
Preto	Couro	MDF
Preto	Couro	Madeira
Preto	Couro	Ferro
Preto	Couro	Aço
Preto	Couro	Plástico
Bege	Tecido	MDF
Bege	Tecido	Madeira
Bege	Tecido	Ferro
Bege	Tecido	Aço
Bege	Tecido	Plástico
Bege	Couro	MDF
Bege	Couro	Madeira
Bege	Couro	Ferro
Bege	Couro	Aço
Bege	Couro	Plástico
Bege	Couro	MDF
Bege	Couro	Madeira
Bege	Couro	Ferro
Bege	Couro	Aço
Bege	Couro	Plástico

Figura 8 – Registro individual de um(a) dos(as) alunos(as) do quadro de possibilidades
 Fonte: Dados do projeto

Nesse registro, resolvemos elaborar o quadro já com algumas lacunas preenchidas, uma vez que era uma quantidade grande de opções de cadeiras e o trabalho poderia se tornar cansativo. Do nosso ponto de vista, achávamos que o preenchimento desses elementos poderia confundi-los, mas, pela análise dos registros, conseguimos perceber que isso não aconteceu, já que, com exceção de uma aluna, os(as) demais conseguiram desenvolver o proposto. Isso nos levou a concluir que a forma de registro foi eficiente.

A SDA apresentada para o 2.º ano do Ensino Médio envolvia o mesmo conceito da apresentada ao 4.º e ao 9.º anos, e os(as) alunos(as) chegaram a soluções semelhantes nos três casos. Destacamos, novamente, que a diferença ateu-se ao enredo da SDA, ao material utilizado e ao modo de encaminhamento.

Com o intuito de trabalharmos também os conceitos de arranjo simples e combinação simples, utilizando apenas o PFC, elaboramos outra SDA que foi apresentada para os(as) alunos(as) através da leitura da história entregue a eles, impressa, cujo enredo, contendo dois problemas, encontra-se no Quadro 5.

Quadro 5 – Enredo da segunda e terceira SDA

Enfrentando outro desafio na profissão

O mercado de trabalho está crescendo cada vez mais e, assim, o dono de uma empresa deve sempre pensar em inovar e diferenciar a sua mercadoria, pois a concorrência está cada vez maior. Agora você, como fabricante das cadeiras e tendo a concorrência das outras empresas, além de os clientes solicitarem modelos de cadeiras diversificadas, teve uma excelente ideia para aumentar ainda mais a venda das suas cadeiras. Como os consumidores atualmente gostam muito de comprar coisas coloridas, você resolve aumentar a quantidade de cores, sendo sete opções: preto, marrom, verde, bege, cinza, lilás e vermelho; e fabricar as cadeiras com cores variadas, sendo que a cadeira agora possui o encosto e o assento, e pode ser fabricada com as cores variando tanto no encosto quanto no assento da cadeira. **De que forma você pode descobrir a quantidade de cadeiras diferentes que poderão ser fabricadas para colocar à venda, lembrando que agora são sete opções de cores: preto, marrom, verde, bege, cinza, lilás e vermelho; e que as cores poderão variar tanto no encosto quanto no assento?** Devido à grande quantidade de cadeiras que foram fabricadas anteriormente, e lembrando que você só tem disponível em sua loja aquelas sete opções de cores, restou um pouco desse material para a fabricação de algumas cadeiras. Porém, como sobrou pouco material, agora você poderá fabricar as cadeiras utilizando cada cor somente uma vez, ou no assento, ou no encosto. **De que forma você pode descobrir quantas cadeiras diferentes poderão ser fabricadas?**

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Depois da leitura, retomamos o primeiro problema, tentando relacionar com a SDA anterior, que considerava uma única cadeira, enfatizando que tinha o diferencial de assento e encosto com cores que poderiam variar, mas não poderia ser usada ali uma cor única.

A solução apresentada foi começarmos a construção da árvore das possibilidades. Evandro, que estava interagindo de forma mais efetiva, disponibilizou-se para ir ao quadro organizar as opções de cadeiras com a opção da cor vermelha no assento, resultando em 6 cadeiras diferentes. Depois, sugeriu fixar a próxima cadeira com o assento preto e, imediatamente, respondeu que eram 42 cadeiras. Explicou que eram 7 cores que ficavam fixas no assento e as outras 6 que variavam no encosto, já que o encosto não poderia ser da mesma cor que já estava no assento. Afirmou, assim, que a forma de resolver o problema era fazer 7 vezes 6, igual a 42.

A manifestação de Evandro permitiu-nos constatar que ele já tinha se apropriado de um modo geral de resolver o problema, mas os(as) outros(as) alunos(as) pareciam ainda não ter compreendido o que o colega estava dizendo. Então, na árvore das possibilidades, fixamos mais uma cor no assento, variando o encosto; e, a partir daí, os(as) demais colegas deram indícios de ter compreendido que poderiam fazer o mesmo procedimento para as outras cores. Dessa forma, encerramos a construção da árvore, e todos(as) concordaram com a resolução do colega, chegando à solução coletiva de que a forma de resolver o problema era fazendo sete vezes seis, ou seja, multiplicando cores de assento por cores de encosto (menos uma já fixada).

Em seguida, retomamos a SDA e apresentamos o segundo problema: De que forma você pode descobrir a quantidade de cadeiras diferentes que poderão ser fabricadas?

Ao solicitar a ajuda da turma, novamente Evandro se manifestou e respondeu que poderia fabricar três cadeiras e sobraria uma cor. Sua resposta indicava que não havia compreendido o problema; entretanto, ele ainda tentava resolvê-lo em sua classe e insistia que, como a cadeira teria

que ter duas cores diferentes sem repetir, o resultado seria seis cadeiras, e era só fazer três vezes dois. Passamos, então, a mediar a solução e, como ninguém mais se manifestava, iniciamos a construção da árvore das possibilidades no quadro, pois entendemos que somente fazer o cálculo não permitiria a todos(as) compreender o modo de resolução. Isso porque, como já várias vezes aqui esclarecemos, a proposição de uma SDA não visa chegar somente a um resultado numérico, mas sim, discutir como resolvê-la, levando à aproximação com o conceito matemático.

Após esta construção – relacionando com a árvore de possibilidades –, introduzimos as fórmulas do arranjo simples e da combinação simples como um modo geral de resolver esse tipo de situação. Com esse encaminhamento, buscamos apresentar para a turma as fórmulas como sínteses de cálculos mais extensos que permitem resolver de maneira mais rápida e eficiente determinados problemas. A intenção era contrapor-nos ao procedimento, normalmente adotado, de iniciar o estudo do conteúdo com as fórmulas para serem decoradas e aplicadas.

Com estas duas SDA, pretendíamos que a turma resolvesse ambos os problemas, usando a árvore das possibilidades, e percebesse que, embora diferentes, eles estavam relacionados ao Princípio Fundamental da Contagem. E, para sistematizar a Síntese da Solução Coletiva, foi entregue uma folha com a seguinte proposta: “Justifique como a turma conseguiu resolver os dois problemas expostos”.

Os(as) alunos(as) escreveram que a forma de resolver foi pela multiplicação e pela árvore das possibilidades. Em seguida, cada um(a) recebeu uma folha para a construção da árvore das possibilidades e, para finalizar, em outra folha, pôde escolher um dos problemas e representar, em um quadro já traçado, todas as opções diferentes de cadeiras.

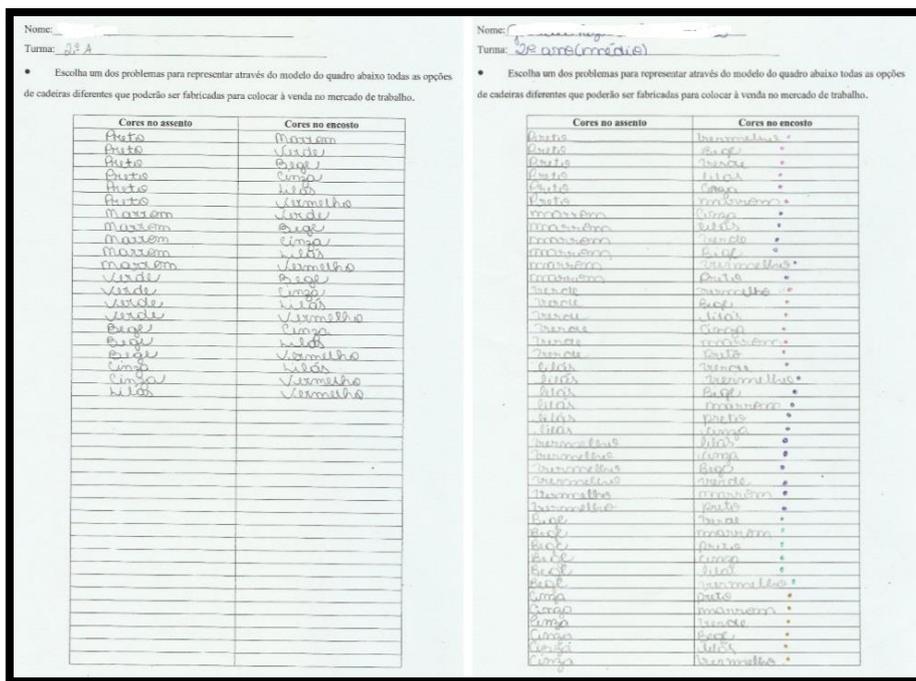


Figura 9 – Registro individual de dois(duas) dos(as) alunos(as) do quadro de possibilidades
 Fonte: Dados do projeto

Como podiam escolher o problema para representar no quadro as opções de cadeiras, ao analisarmos os registros, percebemos que a metade dos(as) alunos(as) representou o primeiro e a outra metade, o segundo. Todos(as) expuseram todas as opções sem dificuldades, apontando indícios de que tinham aprendido.

Algumas considerações: a organização do ensino do PFC

Ao nos propormos identificar a possibilidade de organizar o ensino voltado ao Princípio Fundamental da Contagem na Educação Básica, trouxemos Situações Desencadeadoras de Aprendizagem que foram desenvolvidas no 4.º ano e no 9.º ano do Ensino Fundamental, bem como no 2.º ano do Ensino Médio. As ações aqui apresentadas nos levam a identificar possibilidades de trabalhar com este conhecimento matemático nos três níveis de escolaridade (anos iniciais e anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio), desde que respeitadas as especificidades da turma não só quanto ao aprofundamento matemático mas, principalmente, quanto às especificidades do nível de desenvolvimento dos(as) alunos(as), bem como ao contexto em que estão inseridos.

Constatamos que os(as) estudantes do Ensino Fundamental e os do Ensino Médio demonstraram indícios de que se apropriaram de um modo geral de organização do conceito matemático, para compreender o PFC como um elemento potencializador na resolução de problemas, o que pôde ser observado nos diferentes registros. Embora se tratasse de sujeitos com diferentes níveis de conhecimento, o modo geral que encontraram, aproximando-se do conceito matemático, foi semelhante para todos(as), no que diz respeito ao Princípio Fundamental da Contagem.

Ao planejarmos para o 4.º ano do Ensino Fundamental, considerando que estavam ainda na transição de estágio de desenvolvimento, com atividade principal do jogo para o estudo (LEONTIEV, 1978), organizamos uma SDA que contemplasse a ludicidade e a imaginação, compondo uma história virtual com a temática de *Alice no País das Maravilhas*, a fim de mobilizar os(as) alunos(as) para resolver o problema proposto. A atenção dispensada ao vídeo e a motivação para ajudar Alice a resolver seu problema trouxeram evidências de que utilizar um tema próximo (já sabiam quem era Alice, em razão de outras ações realizadas) e envolver aspectos lúdicos, em que a personagem se dirigia especificamente à turma, foram elementos importantes na organização das ações. Também são indicativos da possibilidade de ter colocado aos alunos a necessidade de resolver um problema que, conforme nossa intencionalidade, exigia um modo matemático de organização. A necessidade dá origem à atividade (LEONTIEV, 1978), que irá se concretizar no motivo, e por meio dela ocorre o desenvolvimento do sujeito. Tais elementos nos aproximam dos princípios da AOE, fundamento teórico-metodológico adotado neste trabalho.

Na organização para o 9.º ano do Ensino Fundamental e para o 2.º ano do Ensino Médio, consideramos, em especial, dois aspectos, sendo o primeiro relacionado ao contexto dos(as) alunos(as), com pouca expectativa de cursar Ensino Superior e interesse em inserir-se no mercado de trabalho. Já o segundo foi orientado pelo que nos aponta Leontiev (1978), que nessa fase o sujeito está na transição da atividade de estudo para a atividade de inserção às formas de vida social, com a expectativa de ocupar novos lugares, adquirindo conteúdos novos e enxergando o mundo com uma nova perspectiva. Os(as) alunos(as) se envolveram nas ações promovidas e, coletivamente, discutiram e encontraram soluções para os problemas propostos, apontando indícios de que a organização das ações levou-os à apropriação de um modo geral de ação para, em especial, resolver situações que envolviam o PFC.

Constatamos a relevância do papel dos recursos utilizados e o modo de encaminhamento adequado a cada um dos três níveis de ensino, para que a turma conseguisse chegar às sínteses das soluções. No 4.º ano, por meio das representações coloridas do Gato da Alice; no 9.º ano, com o trabalho de recorte e colagem das variações dos tapetes; e no 2.º ano, com os quadros de registro.

Portanto, nossos resultados nos permitem concluir sobre a possibilidade de trabalhar com o Princípio Fundamental da Contagem em diferentes níveis de ensino, atentando para a importância da ludicidade para os anos iniciais e a aproximação com as vivências sociais para os anos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio; o apoio de diferentes materiais adequados a cada uma

das faixas etárias; e as diferentes formas de registro das ações empíricas como um primeiro passo rumo à generalização dos conceitos.

Finalizando, destacamos que as inferências metodológicas adotadas e os resultados observados são amparados na perspectiva de um trabalho prospectivo com o(a) aluno(a) (VYGOTSKI, 1988, 2001), voltado não somente para aquilo que ele(a) sabe fazer, mas para aquilo que poderá fazer – ZDP – a partir da interação com outros sujeitos. Neste sentido, torna-se de vital importância a ação do(a) docente em não subestimar seus(suas) alunos(as), mas proporcionar-lhes amplas possibilidades de desenvolver suas máximas capacidades intelectuais.

Referências

- BRASIL. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília.
- BRASIL. (2002). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais + do Ensino Médio: Matemática*. Brasília.
- BRASIL. (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518-versaofinal_site.pdf>. Acesso em: 17 mar. 2019.
- DANTE, L. B. (2005). *Matemática*. 1. ed. São Paulo: Ática. Volume único.
- HAZZAN, S. (2013). *Fundamentos da matemática elementar – combinatória e probabilidade*. 8.ed. São Paulo: Saraiva.
- LEONTIEV, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário.
- LEONTIEV, A. (1988). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKII, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. 5. ed. São Paulo: Ícone, p.59-83.
- LIMA, E. L. et al. (2006). *A matemática do Ensino Médio*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, v. 2.
- MORGADO, A. C. et al. (2016). *Análise combinatória e probabilidade*. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM.
- MOURA, M. O. de. (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, Rio Claro, v. 12, p.29-43.
- MOURA, M. O. de. (2001). A Atividade de Ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D. de; CARVALHO, A. M. P. de (Org.). *Ensinar a ensinar: didática para a escola fundamental e média*. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, p. 143-162.
- MOURA, M. O. de. (2011). Educar con las matemáticas: saber específico y saber pedagógico. *Revista Educación y Pedagogía*, v. 23, p. 47-57.
- MOURA, M. O. de. (2016). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. 2. ed. Campinas, São Paulo: Autores Associados.

MOURA, M.O. de et al. (2010). A atividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, M. O. (Org.). *A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural*. Brasília: Liber Livro.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. (2009). *A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender*. Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

PASSOS, C. L. B. (2006). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, S. *Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados, p. 77-92.

RUBTSOV, V. (1996). A atividade de aprendizagem e os problemas referentes à formação do pensamento teórico dos escolares. In: GARNIER, C. et al. (Org.). *Após Vygotsky e Piaget: perspectiva social e construtivista*. Escola russa e ocidental. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas.

VIGOTSKI, L. S. (1998). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos superiores*. 6. ed. São Paulo: Martins Fontes.

VYGOTSKI, L. S. (1988). Aprendizagem e desenvolvimento intelectual na Idade Escolar. In: VIGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. 5. ed. São Paulo: Ícone; Editora da Universidade de São Paulo, p. 103-117.

VYGOTSKI, L. S. (2001). *Obras Escogidas II: problemas de psicologia general*. Madrid: A. Machado Libros.