MATEMATIZAÇÃO EM ATIVIDADES DE CRIPTOGRAFIA

Mathematization in cryptography activities

Fabiana Cotrim [fabiana_cotrim@yahoo.com.br]
Beatriz F. Litoldo [beatrizfernanda_rc@hotmail.com]
Mariana Maria Rodrigues Aiub [marianamra@gmail.com]
Maurício Compiani [compiani@unicamp.br]
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Cidade Universitária Zeferino Vaz - Barão Geraldo, Campinas - SP, 13083-970

Recebido em: 12/03/2021
Aceito em: 14/09/2021

Resumo

As teorias da Educação Matemática Realística e do Circuito Epistemológico do Conhecimento em Matemática fomentam discussões sobre os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática em articulação com o conceito de Matematização. Na atualidade, embora essas duas teorias possam estar incorporadas nos currículos, ainda há muito o que se avançar em termos de como seus elementos podem ser convertidos em práticas de ensino efetivas. É com este intuito que a presente investigação teve como objetivo compreender de que forma os processos de Matematização Horizontal e Vertical, dentro do Circuito Epistemológico do Conhecimento, se concretizam em atividades envolvendo criptografia, através de um estudo contando com a participação de 19 estudantes de um programa de pós graduação em Ensino de Ciências e Matemática que experienciaram o desenvolvimento de duas atividades, seguindo os princípios da Matematização e envolvendo o tema de criptografia. Os resultados deste estudo evidenciaram que os participantes, mesmo sem dominarem o conceito de Matematização, desenvolveram e completaram implicitamente todo o processo, pelo 'fazer matemática' concebido e oportunizado. No processo de Matematização Horizontal, o mesmo se concretizou pelo reconhecimento de etapas denominadas Estrutura, Relações e Regularidades, e no processo de Matematização Vertical por etapas denominadas Modelos, Fórmulas e Generalizações. Através deste estudo observou-se que a potencialidade do ensinar matemática por meio da Matematização se dá pela valorização do processo de construção do conhecimento matemático e não só, o conhecimento matemático em si.

Palavras-chave: Circuito Epistemológico do Conhecimento; Prática; Função Afim.

Abstract

Theories of Realistic Mathematics Education and the Epistemological Circuit of Knowledge in Mathematics foster discussions of the teaching and learning processes in Mathematics in articulation with the concept of Mathematization. Currently, although these two theories may be incorporated into the curricula, much remains to be done in terms of how their elements can be converted into effective teaching practices. With this intention, the present investigation aimed to understand how the processes of Horizontal and Vertical Mathematization, within the Epistemological Circuit of Knowledge, come to fruition in activities involving cryptography, through a study with the participation of 19 students from a graduate students program in Teaching of Science and Mathematics who experienced the development of two activities, following the principles of Mathematization, involving cryptography. The results of this study showed that the participants, even without mastering the concept of mathematization, developed and implicitly completed the entire process, by 'doing math' conceived and provided. In the Horizontal Mathematization process, the same was achieved by recognizing the phases called Structure, Relations and Regularities and in the Vertical Mathematization process, phases are called Models, Formulas and Generalizations. With this study, it was observed that the potential of teaching mathematics using Mathematization is given by the valorization of the process of construction of mathematical knowledge and not only the mathematical knowledge itself.

Keywords: Epistemological Circuit of Knowledge; Practice; Linear function.

Introdução

Para Heuvel-Panhuizen (Unesco, 2016) do Instituto Freudenthal[1], uma aprendizagem matemática pode ser considerada de qualidade, quando ela possibilita a aquisição de conhecimentos que sejam úteis para o exercício da cidadania, permitindo ao estudante compreender e agir sobre o mundo. Para que isso ocorra, ainda segundo a autora, é necessária uma educação que proporcione aos estudantes a visão da Matemática como ciência viva, em plena expansão e em conexão com o mundo real, em oposição a ideia de que seja um corpo de conhecimentos rígidos e pré-estabelecidos (Unesco, 2016).

É nessa perspectiva que, concebendo a Matemática como uma ciência viva, dinâmica e historicamente construída pelos homens para atender determinados interesses e necessidades sociais, teorias sobre ensino e aprendizagem são discutidas, tais como a Etnomatemática (e.g., Borba, 1990; D'Ambrósio, 2005), a Educação Matemática Crítica (e.g., Skovsmose, 2001; Skovsmose, 2008), a Modelagem Matemática (e.g., Bassanezi, 2002; Meyer; Caldeira & Malheiros, 2011), a Resolução de Problemas (e.g., Onuchic, 2013; Onuchic & Allevato, 2011), as Tecnologias Digitais (e.g., Borba; Scucuglia & Gadanidis, 2014; Villarreal & Borba, 2010), entre outras. Além dessas teorias, a Educação Matemática Realística (Freudenthal, 1968) e o Circuito Epistemológico do Conhecimento em Matemática (Luccas & Batista, 2011) fomentam essas discussões em articulação com o conceito de Matematização, que inclui os processos de Matematização Horizontal e Matematização Vertical.

Em contextos atuais, é possível observar que muitos elementos dessas teorias que discutem os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática encontram-se incorporados nos currículos da Educação Básica e fazem-se presentes nos discursos envolvendo o âmbito escolar. Entretanto, conforme afirma Ortega (2014), esses processos

> [...] não se convertem em práticas de ensino que deem significado aos conteúdos matemáticos. As reformas curriculares ocorridas nos últimos anos no Brasil têm evidenciado tal situação. Mesmo com orientações que sugerem práticas que vão além da memorização, da abordagem mecânica e superficial dos conteúdos matemáticos, esse tipo de prática persiste nas salas de aula (Ortega, 2014, p. 76).

Ainda de forma a complementar a realidade das práticas de ensino de Matemática em sala de aula, Boaler (2019) relata que a prática educativa mais comum nessa área ainda é o professor na frente da sala demonstrando métodos durante 20 a 30 minutos do tempo de aula todos os dias, enquanto os estudantes copiam as explicações em seus cadernos para depois resolverem conjuntos de questões quase idênticas, apenas com o propósito de praticar esses métodos. Ou seja, essa autora observa que se trata de um ensino de Matemática em que conceitos matemáticos são desenvolvidos de forma mecânica, superficial, sem que os estudantes consigam atribuir significado a eles (Boaler, 2019).

Esse tipo de ensino, segundo Boaler (2019), configura-se como ineficaz, pois estimula uma aprendizagem passiva pautada na memorização de métodos e se afasta de uma aprendizagem que estimule a investigação, o questionamento e a orientação para solução de problemas. Assim, práticas de ensino com tais características corroboram o que Ortega (2014) discute ser uma abordagem da Matemática como uma estrutura estável e inquestionável, justificando que essa visão do conhecimento matemático acaba prejudicando uma maior aproximação dos indivíduos, pois muitos acabam considerando necessário possuir habilidades especiais para a aprendizagem deste conhecimento. Reforçando o estereótipo, a autora destaca ainda que, quando pessoas que passaram pela Educação Básica são questionadas se há alguma disciplina que consideram certa, exata e não

[1] O Instituto Freudenthal da Universidade de Utrecht – Países Baixos – conduz pesquisas sobre a melhoria do ensino de matemática, luz à concepção da Educação Matemática Realística.

sujeita a questionamentos, muitos respondem rapidamente e sem hesitar que a Matemática é uma área de conhecimento com tais características.

Dentre as possibilidades de temáticas que podem envolver as atividades desenvolvidas em sala da aula, a escolha pelo tema de criptografia justifica-se pelo fato de ser uma temática atual, pois está ligada à segurança de dados no ciberespaço, motivadora e instigante, por tratar de mensagens secretas e de poder ser envolvida em contos de mistério e\ou ficção e, interessante ao processo de aprendizagem, por oportunizar o desenvolvimento da autonomia do estudante relativo às suas atitudes investigativas, aos seus distintos processos de solução elaborados e quanto a construção do conceito trabalho (LITOLDO, 2016).

Originada das palavras gregas *kriptós* (oculto) e *gráphein* (escrever), a criptografia encontra-se presente em qualquer meio de comunicação em que o sigilo do que é comunicado é considerado primordial. Ela é definida como sendo a arte ou a ciência de escrever mensagens em cifras ou em códigos, de forma que somente a pessoa autorizada possa decifrar e ler as mensagens (Tamarozzi, 2001). Assim, criptografar mensagens nada mais é do que cifrar a comunicação com a finalidade de ocultá-la a terceiros.

Presente desde os primórdios relativos à necessidade de se ocultar mensagens, a criptografia é considerada tão antiga quanto à própria escrita hieroglífica dos egípcios (Singh, 2008), sendo ela considerada uma das ciências que permeou a história da humanidade através das situações e meios em que a comunicação secreta era primordial[2].

Quando se reflete sobre o entrelaçamento entre a criptografia e a Educação Matemática, alguns autores debruçaram-se sobre essa temática com propósito de estudar as potencialidades que tarefas de caráter criptográfico teria no trabalho com os conteúdos matemáticos da Educação Básica (Fincatti, 2010; Groenwald; Franke & Olgin, 2009; Groenwald & Olgin, 2011, Litoldo, 2016; Olgin, 2011; Tamarozzi, 2001). Compreendendo que a cifração e decifração de mensagens não depende de apenas um único procedimento, considera-se que “tarefas envolvendo problemas criptográficos possibilitam um leque de possibilidades de estratégias de resolução, além de despertar a curiosidade e as atitudes investigativas dos estudantes” (LITOLDO, 2019, p. 83).

Diante das possibilidades que tarefas criptográficas podem deter no trabalho em sala de aula com os estudantes e frente a sua característica de permitir o desenvolvimento de múltiplos processos de resolução, visualiza-se a possibilidade de desenvolver e/ou adaptar tarefas que oportunizem os estudantes a construção de um determinado conceito, partindo de seus conhecimentos prévios e informais, chegando até a formalização e generalização do conceito abordado.

Posto isto, este estudo parte do pressuposto que um dos caminhos para diminuir o distanciamento entre teorias da Educação Matemática e práticas de ensino em sala de aula, assim como combater o estigma atribuído à Matemática, seja a proposição de atividades para estudantes que possibilitem uma aprendizagem de qualidade seguindo os princípios de tais teorias e por conseguinte, a experienciação do que essas teorias de ensino e de aprendizagem em Matemática propõem. Logo, considerando a criptografia como a temática envolta em tais atividades, a presente pesquisa teve como objetivo: **Compreender de que forma os processos de Matematização Horizontal e Matematização Vertical, dentro do Circuito Epistemológico do Conhecimento, se concretizam em atividades envolvendo criptografia.**

[2] Para mais informações sobre a história da criptografia e como ela influenciou a humanidade ver em Singh (2008) e Litoldo (2016).

A Matematização na Educação Matemática Realística e no Circuito Epistemológico do Conhecimento Matemático

O interesse em compreender a natureza do conhecimento matemático para se pensar formas de promover uma aprendizagem de qualidade, remete a reflexões relacionadas a como se originou e se sistematizou esse conhecimento. Luccas e Batista (2011, p. 454) afirmam que "o início da sistematização do conhecimento matemático é fruto do pensamento reflexivo sobre fenômenos naturais e sociais" e, portanto, esse conhecimento incialmente decorre das necessidades práticas e reais do ser humano. Entretanto, o processo de formalização desse conhecimento como um conhecimento científico deu-se pelo desenvolvimento de métodos formais, usando conexões lógicas entre teoremas e demonstrações, sendo regidos por símbolos e regras. Isso fez com que o conhecimento matemático se tornasse altamente abstrato e se desvinculasse da tarefa de ser um instrumento de compreensão da realidade física (Luccas & Batista, 2011; Santos, 2014). Dessa forma, passou a ser um desafio proporcionar a apropriação desse conhecimento em contextos não formais, preferencialmente associados aos afazeres cotidianos. É nesse cenário que teorias educacionais como a Educação Matemática Realística (Freudenthal, 1968) foram desenvolvidas sobre o ensino e a aprendizagem do conhecimento matemático.

A Educação Matemática Realística é uma teoria da Educação Matemática que surgiu entre as décadas de 1960 e 1970, e teve como seu precursor o educador matemático alemão Hans Freudenthal (1905-1990) que, em oposição à abordagem mecanicista do Movimento da Matemática Moderna predominante na época, fomentou as seguintes ideias:

> - matemática como **Atividade Humana;**
> - ensino e aprendizagem como **Princípio de Reinvenção Guiada**;
> - aprendizagem por meio da **Matematizaçã**o;
> - reinvenção de ferramentas matemáticas por meio da **Matematização Progressiva** (Ferreira & Buriasco, 2016, p. 241, grifos dos autores).

Sobre cada uma dessas quatro ideias, primeiramente na perspectiva de Freudenthal (1968), a Matemática é entendida como *Atividade Humana*. Dessa forma, ela não deve ser ensinada como algo pronto e, portanto, ser apenas transmitida, mas sim, construída junto com os estudantes dando a oportunidade de a experimentarem, no que ele denominava 'fazer matemática'.

Relativo à segunda ideia, o ensino e a aprendizagem são propostos como *Princípio de Reinvenção Guiada*, pois se a Matemática é uma atividade humana e seu conhecimento deve ser experimentado, nesse contexto, é papel do professor a mediação e o estímulo para que o estudante possa percorrer um caminho de experiências mentais de modo que, partindo de suas necessidades e ideias informais, possa reinventar o que se espera que ele aprenda.

A proposta da aprendizagem por meio da *Matematização*, terceira ideia fomentada pela Educação Matemática Realística e de maior interesse neste estudo, compreende a organização da realidade com significado matemático. Nesse sentido, Trevisan e Mendes (2013, p. 132) argumentam que, "o foco do processo de ensino e aprendizagem não deve estar na Matemática como ciência, mas no processo de matematizar, ou seja, organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos". De mesmo modo, para Luccas e Batista (2011, p. 456) a Matematização é a "atividade matemática que possibilita a organização e a estruturação dos fenômenos naturais pertencentes à realidade complexa, por meio de uma identificação de regularidades, padrões, relações e, posteriormente, estruturas matemáticas".

Freudenthal (1968) considera a Matematização em dois aspectos: o primeiro explica a ideia do realístico, que deve envolver tarefas ou fenômenos a serem explorados para ensinar um assunto matemático; e o segundo, diz respeito ao desenvolvimento dos procedimentos matemáticos para explorar os fenômenos abordados. Na tentativa de poder elucidar mais sobre essas duas vertentes, Treffers (1987) propõe o desenvolvimento de duas componentes na Matematização: a Matematização Horizontal e a Matematização Vertical.

A Matematização Horizontal viabiliza a abordagem de um problema da realidade por meio de ferramentas matemáticas e, assim, envolve a identificação de objetos matemáticos presentes no contexto do problema. Para De Lange (1987), essa componente, como um processo, engloba ações como: identificação da Matemática específica em um contexto geral; esquematização; formulação e visualização de um problema por diferentes modos; descoberta de relações; descoberta de regularidades; e reconhecimento de aspectos isomorfos em problemas diferentes.

A Matematização Vertical é o processo de reformulação do problema da realidade em vias matemáticas, visando sua formalização e generalização, ou seja, está relacionado à habilidade de operacionalização dos objetos matemáticos identificados na Matematização Horizontal. Nesse sentido, para De Lange (1987), esse processo envolve ações como: representação de uma relação em uma fórmula; prova de regularidades; refinamento e ajuste de modelos; uso de diferentes modelos; combinação e integração de modelos; formulação de um novo conceito matemático; e generalização.

Por fim, para Freudenthal (1968), conceitos matemáticos, estruturas e ideias foram inventados como ferramentas para organizar fenômenos do mundo físico, social e mental, então o uso dessas ferramentas para oportunizar a *Matematização Progressiva* deve ser guiada pelos seguintes princípios: "a utilização de contextos; modelos de reinvenção guiada; a utilização da própria produção e construção dos estudantes; a interação entre os estudantes; e o entrelaçamento de vários conteúdos" (Ciani, 2012, p. 30).

Com o intuito de propor um modelo que também contribua com os processos de ensino e de aprendizagem em Matemática, a partir das ideias que a Educação Matemática Realística apresenta sobre os processos de Matematização Horizontal e Vertical, mas integrados a outros conceitos, é que Luccas e Batista (2011) explicam o *Circuito Epistemológico do Conhecimento Matemático* (CECM): um modelo que explora a Matemática a partir das suas relações com contextos da realidade. Esse modelo se estrutura em torno de três componentes – contextualização, descontextualização e recontextualização – e processos de transição entre essas componentes dentro do circuito (Figura 1).

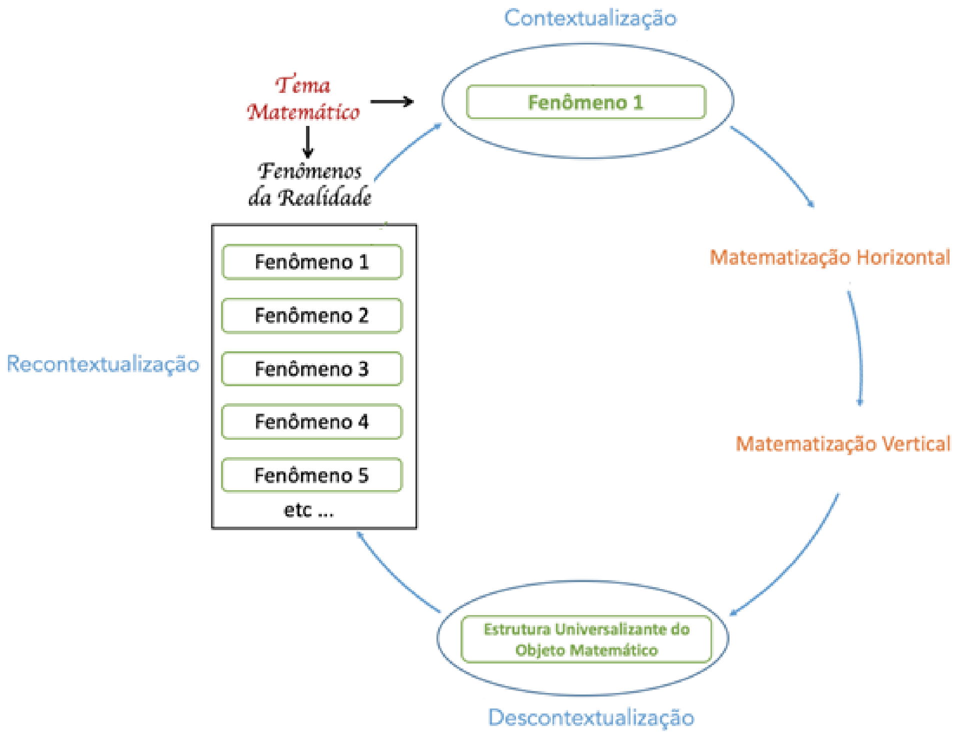


Figura 1. Circuito Epistemológico do Conhecimento Matemático. **Fonte**: Elaborada pelos autores (2021)

Nesse modelo de ensino e de aprendizagem, primeiramente escolhe-se um tema matemático para ser abordado na perspectiva do CECM. Com essa escolha, o circuito inicia-se com a componente *Contextualização* apresentando algum fenômeno da realidade que esteja relacionado ao tema escolhido, resultante de transposições, com a finalidade de que possa ser abordado em um contexto adequado. Com base em uma contextualização apropriada e informações suficientes para serem interpretadas, é possível iniciar um processo de Matematização Horizontal dentro do CECM. Luccas e Batista (2011) destacam que nesse processo ocorre: (i) a análise do conhecimento matemático que permeia a contextualização apresentada; (ii) o reconhecimento de variáveis e relações que se estabelecem entre elas; e (iii) a identificação de regularidades.

Completo o processo de Matematização Horizontal, de forma contínua dá-se início ao processo de Matematização Vertical que envolve: (i) a representação das regularidades através de uma linguagem matemática adequada; (ii) a análise das diferentes estruturas que decorrem das regularidades que foram identificadas e escritas em linguagem matemática; (iii) o reconhecimento de similaridades entre as estruturas; e o mais importante, (iv) o estabelecimento de generalizações.

O produto constituído ao longo desses dois processos, que como um todo são referentes ao processo de Matematização, compõe a segunda componente desse circuito: a *Descontextualização*. Essa componente é constituída por uma estrutura puramente matemática, em um estágio totalmente desvinculado ao contexto que lhe deu origem e é o que Luccas e Batista (2011, p. 462) identificam como "estrutura universalizante do objeto matemático".

Com a obtenção dessa estrutura universalizante é possível a análise de novos fenômenos que apresentem as mesmas características matemáticas do contexto inicialmente explorado, ou seja, outros contextos relacionados ao mesmo tópico matemático inicialmente escolhido. O resultado obtido nesse processo de recontextualização do conhecimento matemático em outros fenômenos de diferentes contextos, determina a última componente do circuito epistemológico, que é identificada como *Recontextualização*. Por fim, esses novos contextos podem ser utilizados em outras situações para novamente dar-se início ao CECM.

Exemplificando os processos de Matematização Horizontal e Vertical no CECM

Para melhor compreensão, os processos de Matematização Horizontal e Vertical dentro do CECM podem ser exemplificados considerando o contexto desta investigação, ou seja, atividades que envolvam criptografia. Nesse caso, inicialmente toma-se como tópico matemático Funções Afins (Figura 2 – componente Descontextualização) e como contexto da realidade, situações envolvendo cifração e decifração de mensagens, uma vez que estão diretamente relacionados a processos de transformações de letras do alfabeto, e essas transformações podem ser descritas por meio de funções afins.

Portanto, na primeira componente do CECM, a *Contextualização*, poderão ser propostas atividades envolvendo mais de uma situação que demande a cifração e/ou decifração de mensagens em um contexto da realidade (Figura 2– componente Contextualização), previamente concebidas para serem realizadas através de transformações que envolvam Funções Afins, ou seja, situações de cifração e/ou decifração em que para se criar uma mensagem cifrada, ou decifrar uma mensagem, seja necessário fazer uma correspondência entre letras do alfabeto explicitamente, ou implicitamente, através desse tipo de funções.

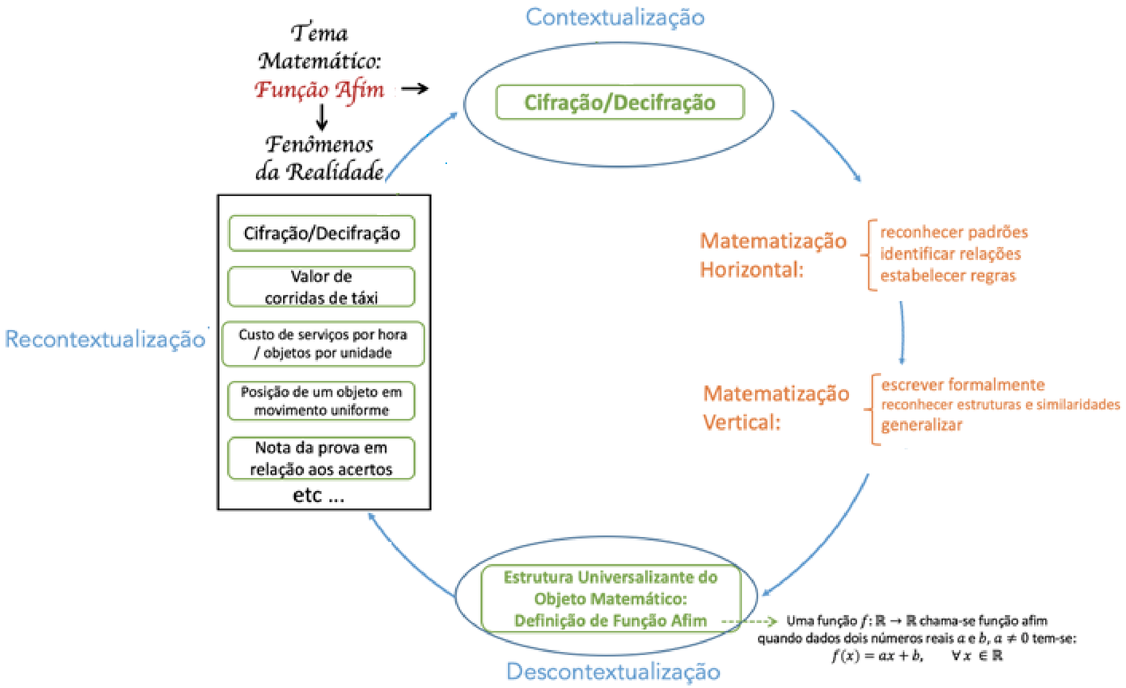


Figura 2. Circuito Epistemológico do Conhecimento Matemático
Fonte: Elaborada pelos autores (2021)

Os casos mais simples de cifração/decifração através de Funções Afins ocorrem por translação, ou seja, quando as letras originais de uma mensagem correspondem a outras letras por meio de uma translação constante, por exemplo, deslocando a letra original três letras a sua frente na ordenação usual do alfabeto que está sendo utilizado, como pode ser observado na Figura 3.

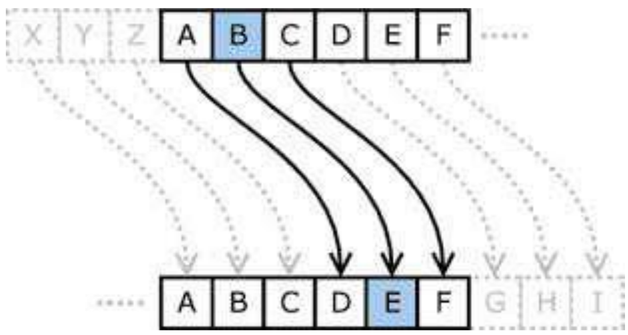


Figura 3. Exemplo de cifração por translação
Fonte: Google imagens (2021)[3]

O processo de Matematização Horizontal (Figura 2) inicia-se quando os envolvidos na resolução dessa atividade percebem que cifrar e/ou decifrar as mensagens apresentadas significa realizar uma transformação entre a mensagem que se tem e a mensagem pretendida, e que para isso, a transformação não é feita ao acaso, mas sim por meio de um padrão previamente estabelecido e que precisa ser reconhecido.

Dessa forma, os envolvidos devem identificar quais são as variáveis envolvidas e que relações se estabelecem entre elas, por meio de alguns apontamentos previstos na própria atividade. Em um processo de decifração, por exemplo, isso pode ser feito observando qual letra é mais frequente na mensagem, ou a localização de letras que possam corresponder às vogais mais usuais,

[3] Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Cifra_de_C%C3%A9sar>. Acessado em: 09/03/2021.

como a vogal ‘A’, ou a vogal ‘E’. Além disso, a própria atividade também pode prever a indicação da correspondência entre duas letras de modo que, a partir da identificação de diferentes relações, possam ser reconhecidas regularidades que conduzam à lei de formação da Função Afim envolvida.

A finalização do processo de Matematização Horizontal ocorre quando os envolvidos reconhecem regularidades, que nessa atividade pode ser interpretado como sendo a identificação da regra que representa a decifração e/ou cifração de todas as letras do alfabeto, destacando que nesse momento, não há a necessidade de que essa regra seja expressa em linguagem formal da Matemática.

O processo de Matematização Vertical (Figura 2) inicia-se nessa atividade quando por meio da linguagem matemática busca-se descrever cada uma das regras que foram identificadas nas diferentes situações de cifração e/ou decifração apresentadas na atividade. Nesse momento deverão se obter diferentes exemplos de Funções Afins. Em posse desses diferentes exemplos, deverá ser observada a similaridade de estrutura entre essas funções e o reconhecimento de uma estrutura generalizante que, nesse caso, deverá ser a expressão geral da Função Afim.

Ao se obter a estrutura universalizante do objeto matemático chega-se ao fim do processo de Matematização Vertical e, de forma mais geral, do processo de Matematização (Figura 2 – componente Descontextualização). A partir daí, esse objeto matemático pode ser explorado dentro do CECM ao se fazer uma recontextualização para além daquele contexto em que ele apareceu, ou seja, empregando o objeto matemático em outras situações reais (Figura 2 – componente Recontextualização).

Contexto e método

Levando em consideração o objetivo que conduz essa investigação, a presente pesquisa assume um caráter qualitativo, uma vez que os autores se propõem a investigar as produções escritas obtidas a partir de uma atividade envolvendo criptografia. Compreende-se que esse método de pesquisa é adequado, pois o intuito é entender as ações e os pensamentos revelados pelos sujeitos da pesquisa durante o processo de desenvolvimento das situações propostas (D’Ambrósio, 2012).

Os participantes do estudo são 19 estudantes do Programa de Pós-Graduação Multiunidades em Ensino de Ciências e Matemática (Pecim), da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp). Estes pós-graduandos formaram um grupo heterogêneo, ao passo que ele se constituiu por profissionais das áreas de Licenciatura em Física, Biologia, Química, Pedagogia, Matemática, Computação e Análise de Sistemas. Esta investigação tem como contexto um estudo realizado com esses participantes estruturado em três etapas: i) praticando a Matematização em atividades de criptografia, ii) apresentação do tema Matematização e discussão/entrelaçamento do tema com as atividades de criptografia e iii) discussão pontual sobre as dúvidas/entendimentos emergentes sobre o tema.

Especificamente neste artigo, o foco será apenas para os dados produzidos durante a etapa (i) praticando a Matematização em atividades de criptografia. Nessa etapa foram utilizadas duas atividades de criptografia adaptadas de Litoldo (2016)[4], em que os participantes organizados em um total de cinco trios e um quarteto tiveram aproximadamente uma hora e meia para respondê-las. A Atividade 1 tinha seu foco principalmente no processo de Matematização Horizontal, enquanto que na Atividade 2, em posse da experiência adquiria na Atividade 1, o foco estava na Matematização Vertical.

A análise dos dados está pautada nos referenciais teóricos que subsidiaram essa pesquisa. Desse modo, com os registros produzidos pelos participantes relativos às duas atividades

[4] Para mais informações sobre as duas atividades desenvolvidas, ver Anexo A.

desenvolvidas, uma leitura foi realizada pelos autores buscando identificar nesses registros a compreensão de como os processos de Matematização Horizontal e Vertical se concretizam. Assim, os dados constituintes da análise são os registros selecionados que, por um lado, foram considerados representativos das respostas dadas às duas atividades, e por outro lado, retrataram, de forma exemplificativa, esses processos. Essa análise implicou na identificação de seis etapas contempladas durante todo o processo de Matematização dentro do CECM, quando consideradas as duas atividades que foram desenvolvidas neste estudo. Dessas seis etapas, três são relativas ao processo de Matematização Horizontal e foram identificadas como: *Estrutura, Relações e Regularidades.* E as outras três são relativas ao processo de Matematização Vertical e foram identificadas como: *Modelos, Fórmulas e Generalizações.*

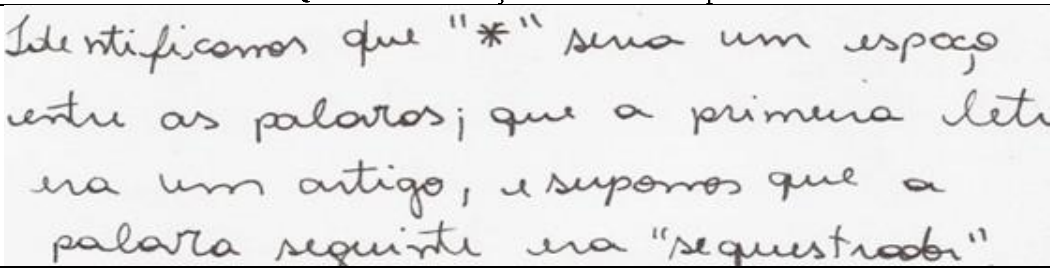
Análise das produções[5]

Na realização da Atividade 1 (Anexo A), dentro do seu escopo, foi possível observar os participantes desenvolverem cinco etapas concernentes ao processo de Matematização dentro do CECM. As três primeiras etapas foram relativas ao processo de Matematização Horizontal, identificadas como *Estrutura, Relações e Regularidades* e as duas últimas foram relativas ao processo de Matematização Vertical, identificadas como *Modelos* e *Fórmulas*.

Nessa atividade, para dar-se início ao CECM na componente *Contextualização* apresentou-se aos participantes uma situação dentro de um contexto da realidade que demandava um processo de decifração de uma mensagem, situação essa concebida através de uma contextualização adequada do conhecimento matemático de Funções Afins. O processo de Matematização, ou de forma mais específica, de Matematização Horizontal se iniciou através da etapa identificada como *Estrutura*, em que os participantes primeiro observaram a estrutura do problema – tanto do texto cifrado, como do enunciado do problema (ver Anexo A) – e fizeram algumas inferências (Quadro 1), tais como:

- A identificação do símbolo "*" como representação de espaço entre as palavras da mensagem criptografada;
- A identificação de palavras no texto cifrado devido ao contexto apresentado no enunciado do problema. Exemplo: a palavra 'sequestrador' e a identificação de vogais no texto cifrado, normalmente pela sua maior frequência e contexto.

Quadro 1. Produção Relativa a Etapa *Estrutura*.


Identificamos que "*" seria um espaço entre as palavras; que a primeira letr era um artigo, e supomos que a palavra seguinte era "sequestrador"

Identificamos que "*" seria um espaço entre as palavras; que a primeira letra era um artigo, e supomos que a palavra seguinte era "sequestrador."

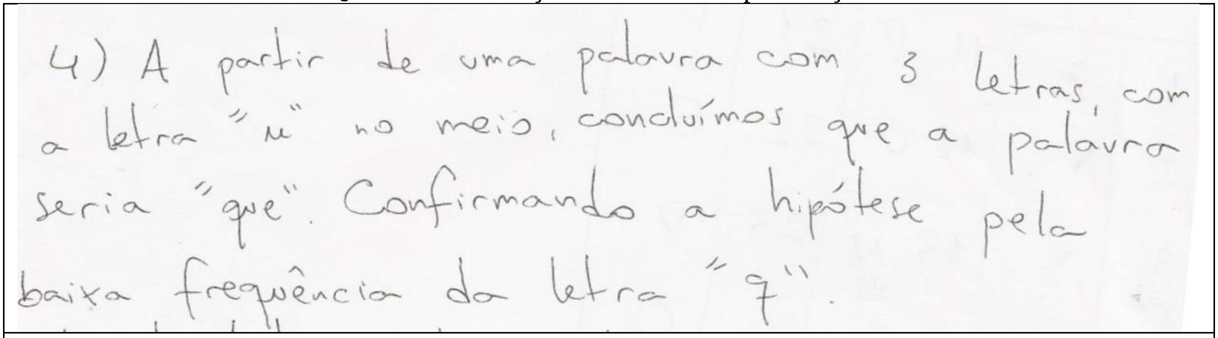
Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Na Etapa identificada como *Relações*, através da observação e do reconhecimento de padrões no texto cifrado, como por exemplo, a frequência de um número (cifra) nesse texto ou o

[5] A produções são imagens completas das respostas dadas pelos estudantes e algumas delas serão apresentadas em Quadros. Como algumas imagens não estão em boa qualidade, abaixo ou do lado direito de todas as imagens será apresentada a transcrição do texto para facilitar a leitura.

contexto em que a cifra aparecia (Quadro 2), os participantes começaram a identificar a cifra de algumas letras do alfabeto e, portanto, estabeleceram relações entre essas letras e números.

Quadro 2. Produção Relativa a Etapa *Relações*.

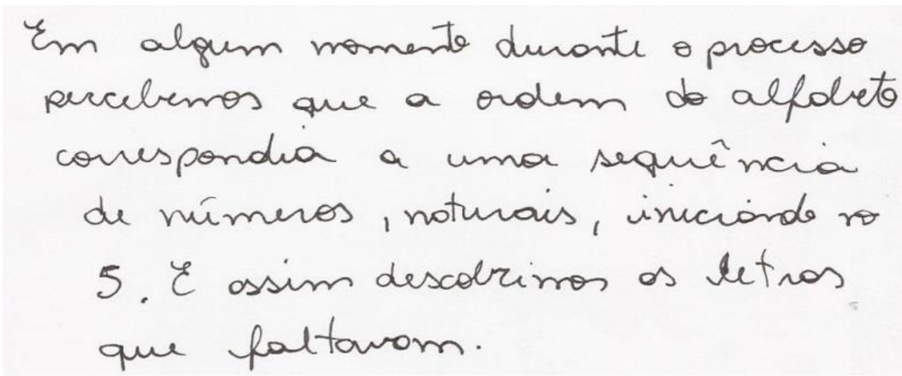

4) A partir de uma palavra com 3 letras, com a letra "u" no meio, concluímos que a palavra seria "que". Confirmando a hipótese pela baixa frequência da letra "q".

A partir de uma palavra com 3 letras, com a letra “u” no meio, concluímos que a palavra seria “que”. Confirmando a hipótese pela baixa frequência da letra “q”.

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Ainda em processo de Matematização Horizontal, na Etapa identificada como *Regularidades* foi possível observar os participantes estabelecerem correspondências entre o que eles próprios nomearam ser a ‘sequência de números da mensagem’ e as letras do alfabeto romano. É importante destacar que essa relação não era direta, pois a sequência de números da mensagem tratava-se de números naturais, porém com início no número 5 e término no número 30 (A ≡ 5; B ≡ 6; ... ; Z ≡ 30), ou seja, havia uma translação na ordenação usual das letras do alfabeto romano (A ≡ 1; B ≡ 2; ...; Z ≡ 26). Mesmo assim, todos os seis grupos conseguiram identificar essa regularidade (Quadro 3) na relação entre letras e cifras, desenvolvendo plenamente o processo de Matematização Horizontal previsto.

Quadro 3. Produção Relativa a Etapa *Relações*.

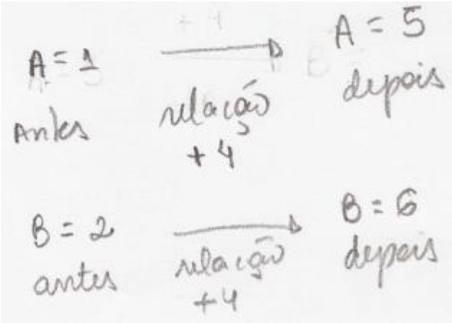
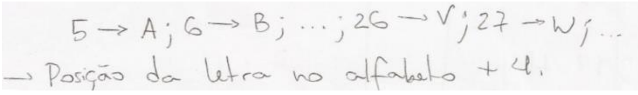

Em algum momento durante o processo percebemos que a ordem do alfabeto correspondia a uma sequência de números, naturais, iniciando no 5. E assim descobrimos as letras que faltavam.

Em algum momento durante o processo percebemos que a ordem do alfabeto correspondia a uma sequência de números, naturais, iniciando no 5. E assim, descobrimos as letras que faltaram.

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

O processo de Matematização Vertical nessa atividade inicia-se com a Etapa identificada como *Modelos*, onde foi possível observar os participantes trabalharem na elaboração de modelos que estabelecessem corretamente a relação entre a sequência de números da mensagem (cifras) e letras do alfabeto, cabendo apenas destacar que alguns modelos apresentados se tratavam de *Modelos de Cifração* (Quadro 4a), enquanto outros se tratavam de *Modelos de Decifração* (Quadro 4b), não ficando claro se os participantes faziam essa diferenciação na hora de elaborá-los.

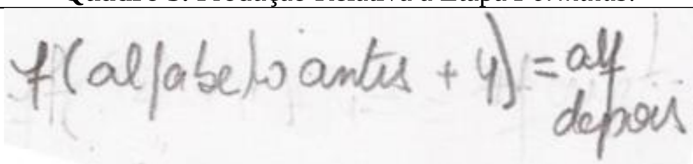
Quadro 4. Modelos de Cifração e Decifração.

(a) Modelos de Cifração	(b) Modelos de Decifração
	
A = 1 ⟶ A = 5 antes relação depois + 4 B = 2 ⟶ B = 6 antes relação depois + 4	5 ⟶ A; 6 ⟶ B; ... ; 26 ⟶ V; 27 ⟶ W; .. ⟶ Posição da letra no alfabeto + 4.

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Na Etapa identificada como *Fórmulas*, última etapa observada sendo desenvolvida pelos participantes na Atividade 1, todos os grupos estabeleceram corretamente uma expressão matemática para a decifração da mensagem criptografada, alguns muito próximos da linguagem formal e simbólica utilizada em funções (Quadro 5). É importante destacar que nessa primeira atividade, por ser introdutória, não se tinha a previsão de que os estudantes completassem todo o processo de Matematização Vertical alcançando a 'estrutura universalizante do objeto matemático', que nesse caso, seria a expressão geral de uma Função Afim.

Quadro 5. Produção Relativa a Etapa *Fórmulas*.


f (alfabeto antes + 4) = alfabeto depois

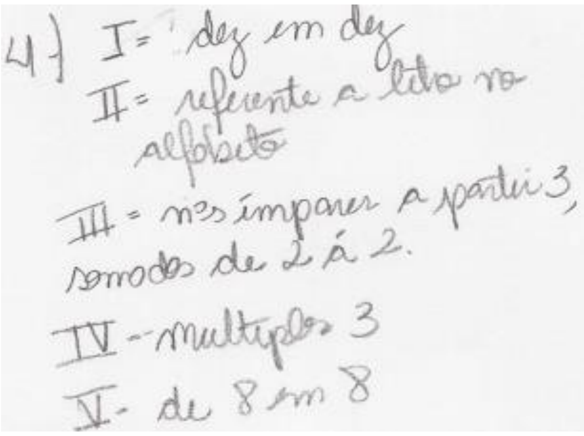
Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Na Atividade 2 (ver Anexo A), todo o processo *de Matematização Horizontal* foi desenvolvido pelos participantes considerando as mesmas etapas observadas na Atividade 1, ou seja, também foram contempladas as etapas *Estrutura*, *Relações* e *Regularidades* e, portanto, não serão aqui relatadas. O que se diferencia nessa segunda atividade é concernente ao desenvolvimento do processo de Matematização Vertical, pois os participantes além de desenvolverem etapas referentes a *Modelos* e a *Fórmulas*, tal como na Atividade 1, cumpriram uma nova etapa, a de *Generalização*, completando o processo de matematização e alcançando a componente *Descontextualização* do CECM.

O texto que deveria ser decifrado na Atividade 2 era composto por cinco mensagens criptografadas, cada uma utilizando cifras distintas. Quando terminado o processo de Matematização Horizontal, os estudantes haviam decifrado cada uma das cinco mensagens, haviam observado relações e, por conseguinte, regularidade nessas relações que permitiram estabelecer uma correspondência entre a ‘sequência de números de cada uma das mensagens’ e as letras do alfabeto romano.

Dado o início do processo de Matematização Vertical, na Etapa *Modelos*, os participantes buscaram formas de descrever as correspondências entre ‘sequência de números de cada uma das mensagens’ e as letras do alfabeto romano (em sua ordenação usual). O mais observado nessa etapa foi a criação de modelos que descreviam essas relações no formato de sequências recursivas (Quadro 6).

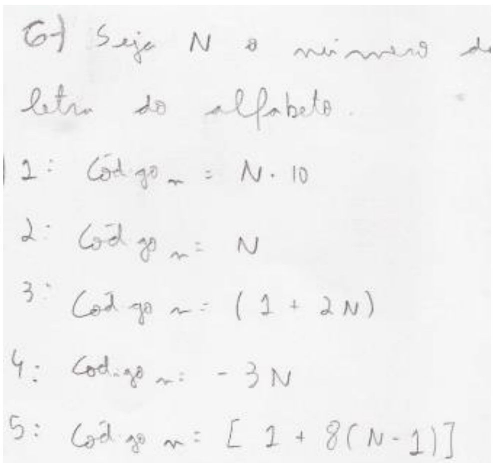
Quadro 6. Produção Relativa a Etapa *Modelos*.

	I = dez em dez II = referente a letra no alfabeto III = n^{os} ímpares a partir 3, somados de 2 a 2. IV = múltiplos de 3 V = de 8 em 8

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Na etapa *Fórmulas* foi possível observar os participantes estabelecerem uma formalização matemática para a relação entre as letras do alfabeto e suas cifras em cada uma das cinco mensagens. Nessa etapa era suposto o aparecimento da estrutura matemática desejada a ser discutida na atividade, ou seja, formalizações que remetessem a estrutura de funções, tal como pode ser observado no Quadro 7.

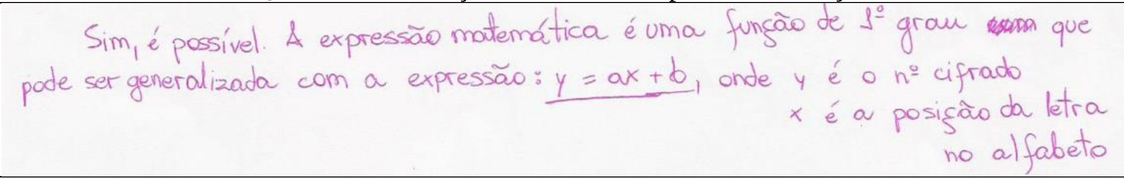
Quadro 7. Produção Relativa a Etapa *Fórmulas*.

	Seja N o número de letra do alfabeto 1: Código n = N*10 2: Código n = N 3: Código n = (1 + 2*N) 4: Código n = 3*N 5: Código n = [1 + 8(N - 1)]

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Por fim, a última etapa observada nessa atividade, identificada como *Generalização*, se tratou do momento em que os participantes conseguiram abstrair a estrutura matemática comum entre as diferentes expressões que descreviam as correspondências entre letras do alfabeto e suas cifras identificadas na etapa Fórmulas, ou seja, descontextualizaram a estrutura matemática que fez o problema emergir, e analisaram essa estrutura de um ponto de vista abstrato (Quadro 8), que nesse caso se tratava da expressão de uma Função Afim.

Quadro 8. Produção Relativa a Etapa *Generalização*


Sim, é possível. A expressão matemática é uma função de 1º grau que pode ser generalizada com a expressão: $\underline{y = ax + b}$, onde y é o nº cifrado x é a posição da letra no alfabeto

Sim, é possível. A expressão matemática é uma função de 1º grau que pode ser generalizada com a expressão: $\underline{y = ax + b}$, onde y é o nº cifrado e x é a posição da letra no alfabeto.

Fonte: Arquivo dos autores (2018).

Tecendo considerações com a teoria

Retomando que para Heuvel-Panhuizen (Unesco, 2016) uma aprendizagem matemática é considerada de qualidade quando possibilita a aquisição de conhecimentos que sejam úteis para o exercício da cidadania, ou seja, que permitam o estudante compreender e agir sobre o mundo, neste estudo considera-se que usar contextos e fenômenos da realidade, como ponto de partida para a construção de conhecimentos matemáticos, pode ser um caminho para uma aprendizagem de qualidade, através da reinvenção desses conhecimentos e valorizando o uso de estratégias informais e intuitivas para essa construção.

Dessa forma, em posse dos princípios da Educação Matemática Realística sobre o conceito de Matematização e de como os processos de Matematização Horizontal e Vertical são concebidos dentro do CECM, a presente investigação se propôs a observar como esses processos se concretizam dentro desse circuito, através de atividades desenvolvidas para esse fim. Assim, em um cenário que explorou como contexto a criptografia, os participantes deste estudo mesmo sem dominarem o conceito de Matematização desenvolveram e completaram os processos Horizontal e Vertical, pelo 'fazer matemática' concebido e oportunizado nas duas atividades.

Dentro da concepção de Matematização como uma *Atividade Humana* (Freudenthal, 1968), os participantes desempenharam um papel ativo na construção do seu próprio conhecimento matemático através do uso de seus conhecimentos informais em relação à Matemática e de características como experimentar diferentes estratégias, tentativa e erro, discussões entre os membros do grupo e participação ativa e reflexiva. Logo, observou-se que os princípios de Matematização considerados no *design* das atividades possibilitaram que os processos previstos servissem como guias e conduzissem os participantes de forma praticamente autônoma nessa construção do conhecimento matemático escolhido para as atividades.

Neste sentido, observando que a ênfase para a aquisição de novos conhecimentos via Matematização está no processo em como o conhecimento é construído e não só no produto, no caso, o objeto matemático em si, neste estudo a *Matematização Progressiva* (Freudenthal, 1968) teve destaque através da aprendizagem que foi oportunizada, que segundo Ciani (2012, p. 30) trata-se de uma aprendizagem que decorre pelo "[...] conflito com sua própria produção, na busca de organizar, estruturar, relacionar, justificar seu conhecimento, elabora "novo" conhecimento e valida os seus argumentos".

Sobre como os processos de Matematização Horizontal e Vertical se concretizaram, consideradas as ações do ‘fazer matemática’ descritas por de De Lange (1987), nesta investigação observou-se, primeiramente, que as ações do processo Horizontal concretizaram-se da seguinte forma:

- *Identificar as especificidades matemáticas no contexto geral*: quando na primeira etapa do processo de Matematização Horizontal – *Estrutura* -, os participantes analisaram a problemática apresentada em cada uma das duas atividades e fizeram inferências que estavam associadas ao conhecimento matemático que permeava essas atividades, no caso, a correspondência entre cifras e letras do alfabeto, implicado, no conhecimento matemático que é relativo ao conceito de funções;
- *Esquematização*: dentro do processo de Matematização Horizontal essa ação foi observada também na etapa *Estrutura*, pois as inferências realizadas inicialmente foram registradas no formato de esquemas, o que permitiu uma melhor visualização das informações fornecidas em cada uma das atividades;
- *Formulação e visualização de um problema de diferentes modos:* também observada na etapa *Estrutura*, essa atividade se concretizou quando os participantes compreenderam que o problema matemático se tratava da correspondência entre letras do alfabeto e números (cifras), e que essa correspondência era regida por um padrão que deveria ser descoberto;
- *Descobrir relações*: essa ação se concretizou na etapa do processo que leva esse nome, ou seja, na etapa *Relações*, em que os participantes, a partir de suas inferências e outras informações contidas no contexto de cada uma das atividades, conseguiram estabelecer a relação correta entre algumas letras do alfabeto e suas cifras;
- *Descobrir regularidades:* essa ação se concretizou na etapa do processo de Matematização Horizontal, que também foi destinado especificamente a este fim, ou seja, na etapa *Regularidades*, quando dentre as relações entre letras e cifras já conhecidas, os participantes perceberam qual era o padrão utilizado para determinar as cifras das letras do alfabeto, que como conhecimento matemático está diretamente relacionado a lei de formação da função que representa a cifração/decifração das mensagens apresentadas nas atividades;
- *Reconhecer similaridades em diferentes problemas:* essa ação se concretizou quando os participantes desenvolveram a segunda atividade do estudo, especificamente quando observaram que essa atividade tinha a mesma estrutura que a primeira e então pela experiência adquirida, realizaram todas as ações relativas ao processo de Matematização Horizontal de forma análoga.

Com relação a Matematização Vertical, dentre as ações do ‘fazer matemática’ descritas por De Lange (1987) como específicas desse processo, neste estudo, as seguintes ações concretizaram-se:

- *Representar a relação em uma fórmula:* entendendo que no contexto do estudo tratava-se da representação da lei de correspondência entre letras do alfabeto e suas cifras, essa ação se concretizou tanto na etapa identificada como *Modelos*, como na etapa *Fórmulas*, em que no primeiro caso essa representação se deu por meio de esquemas, enquanto que na segunda foi através de algum tipo de expressão matemática, muito semelhante a descrição formal de uma função;
- *Refinar e ajustar modelo:* essa ação foi observada e concretizada entre as etapas *Modelos* e *Fórmulas*, quando os participantes transitaram entre: os modelos inferidos para expressar a relação que rege as letras do alfabeto e suas cifras, e uma expressão matemática que descrevesse corretamente essa relação;
- *Generalizar:* essa ação se concretizou quando em posse de fórmulas que descreviam a cifração/decifração de cinco mensagens distintas no contexto da segunda atividade, os participantes observaram que a estrutura universalizante do objeto matemático dessas fórmulas

era a mesma, e assim conseguiram abstrair o objeto matemático, no caso, a expressão geral de uma Função Afim, e analisaram essa a estrutura de forma descontextualizada, ou seja, como objeto matemático.

As únicas ações descritas por De Lange (1987) que não se concretizaram no processo de Matematização foram as ações '*provar regularidades*' e '*combinar e integrar modelos'*, referentes ao processo de Matematização Vertical. A ação 'provar regularidades' poderia ter ocorrido através de algum procedimento mais formal, fazendo uso de algum rigor matemático, direcionado a validação das fórmulas de cifração/decifração que foram encontradas na etapa *Fórmulas*. Já a ação 'combinar e integrar modelos' poderia ter sido observada através do reconhecimento e estabelecimento de relações entre fórmulas de cifração e decifração, por exemplo. Mas é importante destacar que nenhuma dessas duas ações foram solicitadas de forma explícita, ou seja, no formato de registro escrito nas atividades desenvolvidas. Isso nos aponta para uma possível direção em pesquisas futuras objetivando a inclusão de tais ações a partir de uma situação envolvendo a criptografia.

Dessa forma, observando que todas as ações descritas por De Lange (1987) em relação à Matematização Horizontal se concretizaram de forma espontânea, mesmo sem todas estarem explicitamente solicitadas neste estudo, enquanto que as ações de Matematização Vertical se concretizaram porque foram solicitadas de forma mais proeminente - no formato de um registro escrito -, e quando não, não foram concretizadas, este estudo sugere que o processo Horizontal ocorre de forma mais natural, e como *Atividade Humana*, do que o processo Vertical. E uma possível explicação para a observação desse indício é o fato de que as ações previstas na Matematização Horizontal estão relacionadas às estratégias intimamente conectadas ao contexto da problemática apresentada e conforme observado neste estudo, foram suficientes para resolver a problemática. Já as ações do processo de Matematização Vertical, como visavam a descontextualização do conhecimento matemático, não tinham esse apelo de um contexto da realidade e então, para que ocorressem, tiveram que ser incluídas como solicitações específicas nas atividades.

Por isso que também na reflexão sobre como os processos de Matematização se concretizaram tomou-se atenção ao princípio que concebe a Matematização como um processo de *Reinvenção Guiada*, associado à oportunidade de os estudantes reinventarem a Matemática, não por si só, mas sim, através de um caminho a ser percorrido, que guiado, permita a construção de um conhecimento matemático (Freudenthal, 1968). O estudo indica que, de fato, as atividades concebidas com este princípio oportunizam essa experiência, ou seja, saindo de um contexto específico, por meio da Matematização é possível chegar em um objeto matemático descontextualizado como uma construção própria de quem percorre esse processo. Mas para que isso ocorra de maneira eficaz, este estudo também evidencia a importância de um *design* adequado de atividades que sigam os princípios dos processos de Matematização Horizontal e Vertical, e que tomem atenção tanto as ações que precisam ser contempladas nesse processo, como também que permitam completar todo o processo, chegando no objeto matemático em questão.

Segundo Ciani (2012, p. 38) na *Reinvenção Guiada* "o aprendiz inventará algo que é novo para ele, mas conhecido para o guia/orientador" e sobre esse aspecto não se pode deixar de destacar que neste estudo, todos os participantes já tinham algum conhecimento sobre o objeto matemático objetivado, no caso, o conceito de Função e de forma mais específica, o de Função Afim. Possivelmente, alguns com mais familiaridade e outros com menos, mas com certeza todos os participantes tiveram contato com esse conhecimento matemático pelo menos na Educação Básica. Com essa característica, uma vez que o objetivo deste estudo era compreender como os processos de Matematização se concretizam, surgiram algumas reflexões acerca de como seria a realização dessa mesma atividade em um contexto escolar e, principalmente, sobre como se daria esse processo de *Reinvenção Guiada*: será que a concretização desses processos ocorreria da mesma forma que foi observada neste estudo? Ou seja, os estudantes completariam de forma autônoma todo o processo de

Matematização guiado apenas pela atividade, ou seria necessária uma maior mediação em relação a *Reinvenção Guiada*?

Nesse cenário de indagações, ao refletir sobre como seria o desenvolvimento dessas atividades em contexto escolar, deu-se atenção também para o papel do professor no processo de Matematização como *Reinvenção Guiada*. De fato, em contexto escolar é o professor quem exerce o papel de *designer* de atividades que possam permitir trajetórias de aprendizagem por meio da Matematização, e para isso, deve considerar situações próximas aos estudantes, ou seja, que lhes sejam relevantes, de modo que se interessem em resolvê-las. Mas além disso, observado neste estudo que o maior desafio dentro desse processo são as ações relacionadas à Matematização Vertical que visam a descontextualização e o alcance da estrutura universal do objeto matemático, o professor deve prever possíveis caminhos pelos quais os estudantes poderão percorrer, quais possíveis obstáculos poderão surgir e o que fazer para superá-los. Ou seja, o professor também deve atuar como interlocutor dos estudantes, fazendo papel de mediação em sala de aula (Gravemeijer, 1994).

Portanto, discutido diferentes aspectos observados sobre como os processos de Matematização Horizontal e Vertical se concretizam através das atividades que foram concebidas para este estudo, uma vez também tecido essa discussão em articulação com os princípios que consideram a Matematização como *Atividade Humana*, *Progressiva* e como processo de *Reinvenção Guiada*, conclui-se que além de compreender como esses processos se concretizam, a presente investigação permitiu também refletir sobre o que é necessário para que os mesmos se concretizem dentro de um contexto de ensino e de aprendizagem escolar, incluindo uma reflexão sobre o papel do professor como *designer* e mediador de trajetórias de aprendizagem.

Desta forma, almejando que atividades que façam uso de Matematização também sejam realizadas em contexto escolar, encerra-se este estudo acreditando que seu possível desdobramento seria o desenvolvimento destas mesmas duas atividades em um contexto escolar, com o intuito de compreender, principalmente, como as ações da Matematização Vertical e papel do professor nesse processo como *Reinvenção Guiada* concretizam-se.

Por fim, a grande potencialidade do ensinar Matemática por meio da Matematização é a valorização do processo de construção de um conhecimento matemático e não só o conhecimento matemático em si, o que na opinião dos autores deste artigo seria um dos caminhos para de fato se oportunizar uma aprendizagem de qualidade aos estudantes, que ao invés de serem meros receptores, de uma matemática pronta e acabada, passariam a ser agentes do seu próprio conhecimento.

Referências

Bassanezi, R. (2002). *Ensino e aprendizagem com Modelagem Matemática: Uma nova estratégia*. Contexto.

Boaler, J. (2019). *O que a matemática tem a ver com isso?* (F. A. C. D. Bueno, Trad.). Penso.

Borba, M. C. (1990). Etnomathematics and Education. *For the Learning*, *10*(1), 39-43.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento* (1º ed). Autêntica.

Ciani, A. B. (2012). *O realístico em questões não-rotineiras de matemática* [Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática)]. Universidade Estadual de Londrina.

D’Ambrósio, U. (2005). *Etnomatemática: Elo entre as tradições e a modernidade.* (2º ed). Autêntica.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning: Teaching, Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences*. OW &OC.

Ferreira, P. E. A., & Buriasco, R. L. C. (2016). Educação matemática realística: Uma abordagem para os processos de ensino e aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(1), 237-252.

Fincatti, C. A. (2010). *Criptografia como agente motivador na aprendizagem da matemática em sala de aula.* [Trabalho de conclusão de curso]. Universidade Presbiteriana Mackenzie.

Freudenthal, H. (1968). Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. *Educational Studies in Mathematics.* v, 1(1-2), 3-8.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht University.

Groenwald, C. L. O., Franke, R. F., & Olgin, C. de A. (2009). Códigos e Senhas no Ensino Básico. *Educação Matemática em Revista*, *2*, 41-50.

Groenwald, C. L. O., & Olgin, C. de A. (2011). Currículo de Matemática no Ensino Médio: Atividades didáticas com o tema Criptografia. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, Recife. *Anais*... Recife, 2011. p. 12.

Litoldo, B. F., & Brito, A. de J. (2019). Capítulo 8 - Criptografia e suas potencialidades na exploração das ideias associadas à função afim. In: SCHEWTSCHIK, A. (Org.). *Matemática: Ciência e Aplicações 3*. Ponta Grossa/PR: Atena Editora, p. 82-99.

Litoldo, B. F. (2016) *As potencialidades de uma sequência pedagógica de atividades envolvendo problemas criptográficos na exploração das ideias associadas à função afim*. [Mestrado em Educação Matemática]. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Luccas, S., & Batista, I. de L. (2011). O papel da matematização em um contexto interdisciplinar no ensino superior. *Ciência & Educação*, *17*(2), 451-468.

Meyer, J. F. C., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. P. S. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Autêntica.

Olgin, C. de A. (2011). *Currículo no Ensino Médio: Uma experiência com o tema criptografia.* [Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática]. Universidade Luterana do Brasil.

Onuchic, L. R. (2013). A Resolução de Problemas na Educação Matemática: Onde estamos? E para onde iremos? *Espaço Pedagógico*, *20*(1), 88-104.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: Caminhos, avanços e novas perspectivas. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, *25*(41), 73-98.

Ortega, E. M. V. (2014). Sobre a natureza do conhecimento matemático. In V. M. Santos (Org.), *Ensino de matemática na escola de nove anos: Dúvidas e desafios* (p. 75–87). Cengage Learning.

Skovsmose, O. (2001). Educação Matemática versus Educação crítica. In *Educação Matemática Crítica: A questão da democracia* (3º ed, p. 13-36). Papirus.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica* (O. de A. Figueiredo & J. C. Barbosa, Trads.). Papirus.

Tamarozzi, A. C. (2001). Codificando e Decifrando mensagens. *Revista do Professor de Matemática*, *45*, 41-43.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Reidel Publishing Company.

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2013). Possibilidades para matematizar em aulas de Cálculo. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, *6*(1), 129-138.

UNESCO. (2016). *Os desafios do ensino de matemática na educação básica.* EdUFSCar.

Villarreal, M. E., & Borba, M. C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: Notebooks, blackboards, calculators, computers and…notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 49-62.

ANEXO A

ATIVIDADE 1

UM CASO DE SEQUESTRO

Sherlock Holmes estava na Espanha, entretendo-se com as touradas, quando foi procurado pelo inspetor Lestrade. O inspetor trazia para Holmes um caso de sequestro. O professor Sergio Carrilho havia sido sequestrado durante sua aula de matemática, na Universidade Complutense de Madri. Na sala de aula, tudo parecia normal, até mesmo algumas contas no quadro negro. Ao entrar na cena do crime, Holmes analisou o ambiente e na mesma hora percebeu o motivo do sequestro. Preocupado, Holmes sabia que a vida do professor estava em suas mãos. Infelizmente o Dr. Watson estava em uma viagem e assim Holmes se viu sozinho com este caso importante. Desta maneira, ele convocou alguns estudantes para ajudá-lo a resolver o crime. Durante as investigações Holmes sentiu um mal-estar e foi levado inconsciente para o hospital deixando apenas uma carta criptografada para os seus ajudantes, no bolso de seu paletó. Assim, resta a seus ajudantes descobrir que mensagem estava escrita na carta e torcer para que nela esteja a identidade do(s) sequestrador(es), o motivo do sequestro e o local onde o professor de matemática está sendo mantido preso, para que a polícia possa agir antes que o criminoso faça algum mal ao professor.

19	*	23	9	21	25	9	23	24	22	5	8	19	22	*	é	*	25	17	*
5	16	25	18	19	*	8	19	*	20	22	19	10	9	23	23	19	22	*	7
12	5	17	5	8	19	*	14	19	23	é	*	20	13	9	22	9	*	8	9
*	19	16	13	26	9	13	22	5	*	19	*	17	19	24	13	26	19	*	8
19	*	23	9	21	25	9	23	24	22	19	*	9	22	5	*	21	u	9	*
19	*	5	16	25	18	19	*	23	9	22	13	5	*	22	9	20	22	19	26
5	8	19	*	18	5	*	8	13	23	7	13	20	16	13	18	5	*	8	9
*	17	5	24	9	17	á	24	13	7	5	*	18	9	23	24	9	*	5	18
19	*	9	*	19	*	20	22	19	10	9	23	23	19	22	*	9	23	24	5
*	23	9	18	8	19	*	17	5	18	24	13	8	19	*	20	22	9	23	19
*	18	5	*	23	5	16	5	*	8	9	*	26	í	8	9	19	*	8	5
*	9	23	7	19	16	5	.												

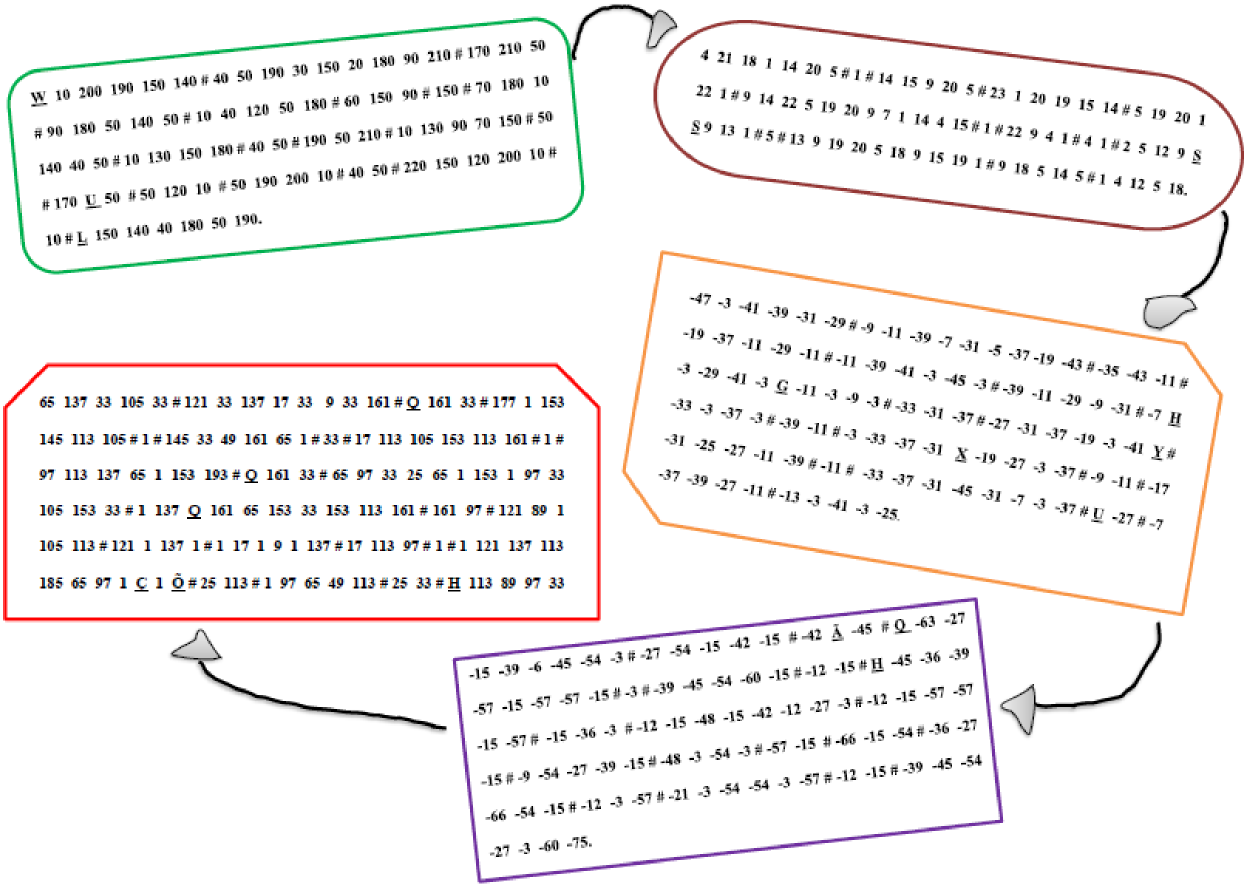
PERGUNTAS

1) Qual é o nome do sequestrador?
2) Qual o motivo do sequestro?
3) Qual o local onde o professor está sendo mantido preso?
4) Descreva detalhadamente qual foi o processo utilizado pelo grupo para decifrar a carta de Holmes.
5) Qual poderia ser a relação utilizada para criptografar as letras do alfabeto? Justifique.
6) Monte um esquema que represente a cifração das letras do alfabeto. Justifique seu esquema.

ATIVIDADE 2

O DETETIVE DR. WATSON

- Watson é um grande amigo e assistente – disse Holmes para o inspetor Lestrade da Scotland Yard, mas nos últimos dias ele anda enigmático, pouco falante e mal anda dormindo em casa. O inspetor, certo de que o Dr. Watson havia se cansado do convívio e da amizade de Holmes, não demonstrou interesse em investigar o Dr. Watson e mandou Holmes para casa. Holmes, como de costume, muito perseverante e confiante em seu instinto decidiu investigar seu amigo por conta própria. Após alguns telefonemas e uma bisbilhotada no quarto de Watson, Holmes encontrou alguns rabiscos criptografados e percebeu que seu amigo estava envolvido em algo misterioso. Mesmo reunindo todas as pistas, Holmes ainda sentia dificuldade em saber o que estava acontecendo com Watson, sendo assim, ele convocou alguns estudantes para ajudá-lo a montar esse quebra cabeça de mistérios que Watson estava envolvido e comprovar para o inspetor Lestrade que algo estava acontecendo.



PERGUNTAS

1) Por que o Dr. Watson estava pouco falante e mal dormia em sua casa?

2) Qual é a teia de mistérios na qual o Dr. Watson estava envolvido?

3) Descreva detalhadamente qual o processo utilizado para decifrarem as pistas.

4) Identifique e descreva o modo utilizado para se criptografar cada uma das pistas I, II, III, IV e V encontradas por Holmes no quarto de Watson.

5) Existem diferenças e semelhanças entre os modos utilizados para se criptografar cada pista? Caso existam justifique.

6) Discuta com seus colegas se é possível escrever esses modos como uma ***expressão matemática***? Se sim, tente encontrar essas expressões, se não justifique.

7) Discuta com seus colegas se é possível escrever a generalização dos modos de criptografar as pistas como uma ***expressão matemática***? Se sim, explicite essa expressão algébrica, se não justifique.